Probabilidade e Estatística, 2008/2

CCT - UDESC

Prof. Fernando Deeke Sasse

Problemas Resolvidos - Intervalos de Confiança

1. Os dados relativos a cargas de falha sobre amostras de um tipo de aço fornecem os seguintes resultados (megapascal):
19.8 , 10.1 , 14.9 , 7.5 , 15.4 , 15.4 , 15.4 , 18.5 , 7.9 , 12.7 , 11.9 , 11.4 , 11.4 , 14.1 , 17.6 , 16.7 , 15.8, 19.5 , 8.8 , 13.6 , 11.9 , 11.4, 13.8, 14.7, 11.2.
Determine o intervalo de confiança de 95% sobre a média amostral.

Solução
A média amostral é

```
> restart
> with(Statistics) :
> L := [19.8 , 10.1 , 14.9 , 7.5 , 15.4 , 15.4 , 15.4 , 18.5 , 7.9 , 12.7 , 11.9 , 11.4 , 11.4 ,
    14.1 , 17.6 , 16.7 , 15.8, 19.5 , 8.8 , 13.6 , 11.9 , 11.4, 13.8, 14.7, 11.2]
```

$L := [19.8, 10.1, 14.9, 7.5, 15.4, 15.4, 15.4, 18.5, 7.9, 12.7, 11.9, 11.4, 11.4, 14.1, 17.6, 16.7, 15.8, 19.5, 8.8, 13.6, 11.9, 11.4, 13.8, 14.7, 11.2]$ **(1.1)**

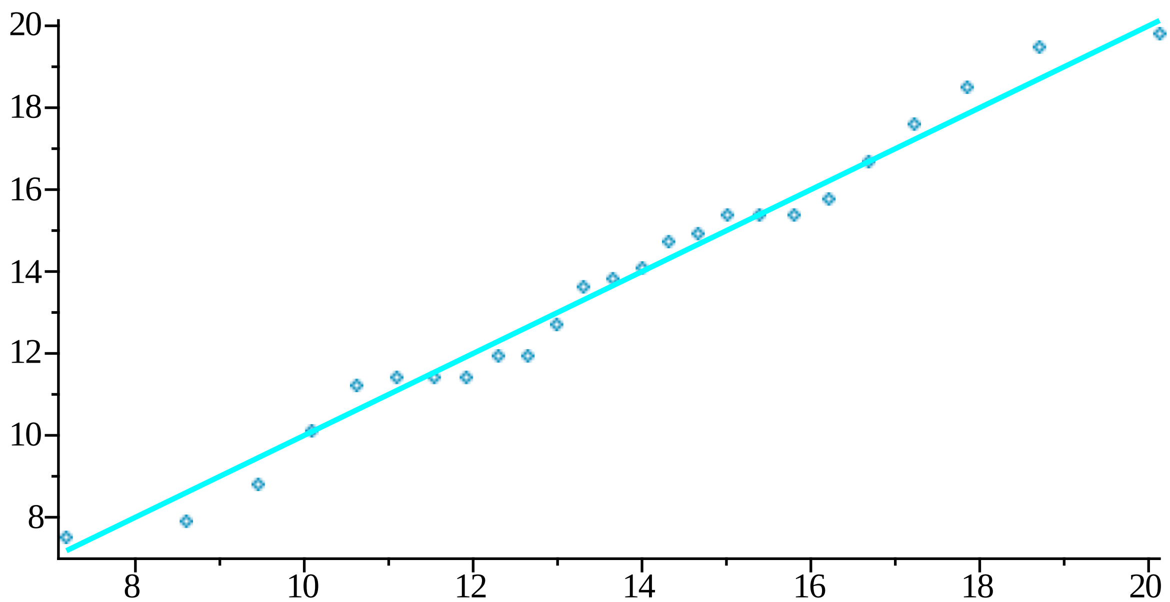
```
> XM := Mean(L)
```

$XM := 13.65600000$ **(1.2)**

```
> ;
```

Um plot normal mostra que a distribuição é aproximadamente normal:

```
> NormalPlot(L, thickness = 2)
```



O desvio padrão da população é desconhecido, de modo que devemos estimá-lo:

> $n := nops(L)$

$$n := 25 \tag{1.3}$$

> $s := \sqrt{\dfrac{sum\left((L[i] - XM)^2, i=1..n \right)}{n-1}}$

$$s := 3.368986000 \tag{1.4}$$

> ;

ou

> $StandardDeviation(L)$

$$3.368986000 \tag{1.5}$$

> ;

Como a amostra é pequena, podemos utilizar a distribuição t para construir o intervalo de confiança. Ou seja, supomos que a variável

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

tem distribuição t com n - 1 graus de liberdade. A distribuição t é dada por

$$f(x) = \frac{\Gamma[(k+1)/2]}{\sqrt{\pi k}\,\Gamma(k/2)} \cdot \frac{1}{[(x^2/k)+1]^{(k+1)/2}} \quad -\infty < x < \infty$$

ou seja,

> $f := (x, k) \rightarrow \dfrac{\Gamma\left(\frac{(k+1)}{2}\right)}{\sqrt{\pi \cdot k}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \cdot \dfrac{1}{\left(\left(\frac{x^2}{k}\right)+1\right)^{\frac{(k+1)}{2}}}$

$$f := (x, k) \rightarrow \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}k + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi k}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}k\right)\left(\frac{x^2}{k}+1\right)^{\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}}} \tag{1.6}$$

> ;

Aqui

> $k := n - 1$

$$k := 24 \tag{1.7}$$

Os limites de confiança de 95% sobre μ são

$$\overline{x} - t_{\alpha/2,n-1}s/\sqrt{n} \leq \mu \leq \overline{x} + t_{\alpha/2,n-1}s/\sqrt{n}$$

ou seja,

> $\alpha := 0.05$

$$\alpha := 0.05 \tag{1.8}$$

Devemos agora determinar o valor de t que corresponde à probabilidade acumulada $\alpha/2=0.025$:

```
> CD := 0 : t0 := -3 :
> while CD < 0.025 do
    CD := evalf(int(f(t, k), t = -∞..t0));
    t0 := t0 + 0.001;
  od:
> t0
```

$$-2.062 \tag{1.9}$$

De fato,

```
> X := RandomVariable(StudentT(k)) :
> CDF(X, t0)
```

$$0.02509741268637369000 \tag{1.10}$$

> $x0 := -evalf\left(\frac{t0 \cdot s}{\sqrt{n}}\right)$

$$x0 := 1.389369826 \tag{1.11}$$

Os limites de confiança de 95% para a média são então

> XM

$$13.65600000 \tag{1.12}$$

> $L1 := XM + x0;\ L2 := XM - x0$

$$L1 := 15.04536983$$
$$L2 := 12.26663017 \tag{1.13}$$

> ;

2 Um teste de impacto foi realizado em 20 amostras de tubo PVC. A média amostral de força de ruptura é $xm = 1.25$ e o desvio padrão amostral é $s=0.25$. Encontre um intervalo de confiança limitado inferiormente de 99% na média da força de ruptura.

Solução

Lembramos a definição

A $100(1 - \alpha)\%$ **upper-confidence bound** for μ is

$$\mu \le u = \bar{x} + z_\alpha \sigma/\sqrt{n}$$

and a $100(1 - \alpha)\%$ **lower-confidence bound** for μ is

$$\bar{x} - z_\alpha \sigma/\sqrt{n} = l \le \mu$$

Como a amostra é pequena devemos utilizar a distribuição t para construir o intervalo de confiança.

```
> restart
> with(Statistics):
> CD := 0 : t0 := -3 : k := 19 :
> X := RandomVariable(StudentT(k)) :
> while CD < 0.010 do
    CD := evalf(CDF(X, t0));
    t0 := t0 + 0.010;
  od:
> t0
                                -2.520                                (2.1)
> CDF(X, t0)
                          0.01042087338023369 24                      (2.2)
> L := - t0·0.25/sqrt(20.)
                            L := 0.1408722826                         (2.3)
> 1.25 - L
                              1.109127717                             (2.4)
>
```

O intervalo de confiança de 99% na média é, portanto, [1.108, + ∞].

3 Um fabricante produz anéis de pistão com diâmetro normalmente distribuído com σ = 0.001 mm. Uma amostra aleatória de 15 anéis tem diâmetro médio *xm* = 74.036 mm.
(a) Construa um intervalo de 99% de confiança na média do diâmetro do pistão.
(b) Construa um intervalo de 99% de confiança inferiormente limitado na média do diâmetro do pistão

Solução

```
> restart
> with(Statistics):
>
> σ := 0.001 : μ := 74.036 :
> CD := 0 : t0 := -3 :
> X := RandomVariable(Normal(0, 1)) :
> while CD < 0.005 do
    CD := evalf(CDF(X, t0));
    t0 := t0 + 0.0005;
  od:
> t0
                                -2.5750                               (3.1)
> 2· CDF(X, t0)
                             0.01002400866                            (3.2)
> X1 := - t0·σ/sqrt(15.)
                                                                      (3.3)
```

$$X1 := 0.0006648621411 \quad \textbf{(3.3)}$$

> $L1 := \mu - X1;\ L2 := \mu + X1$

$$L1 := 74.03533514$$
$$L2 := 74.03666486 \quad \textbf{(3.4)}$$

Portanto, o intervalo de confiança é [74.0353, 74.0367].

> ;

(b)

> $CD := 0 : T0 := -3 :$

> $X := RandomVariable(Normal(0, 1)) :$

```
> while CD < 0.01 do
    CD := evalf(CDF(X, T0));
    T0 := T0 + 0.001;
  od:
```

> $T0$

$$-2.325 \quad \textbf{(3.5)}$$

> $CDF(X, T0)$

$$0.01003598010027405 11 \quad \textbf{(3.6)}$$

> $Y1 := -\frac{T0 \cdot \sigma}{\text{sqrt}(15.)}$

$$Y1 := 0.0006003124187 \quad \textbf{(3.7)}$$

> $LI1 := \mu - Y1$

$$LI1 := 74.03539969 \quad \textbf{(3.8)}$$

Portanto, o intervalo de confiança é [74.0354, ∞].

4 Uma máquina produz barras de metal utilizadas em um sistema automobilístico. Uma amostra aleatória de 15 elementos é selecionada e o diâmetro é medido. Os dados resultantes (em mm) são os seguintes: 8.24, 8.25, 8.20, 8.23, 8.24, 8.21, 8.26, 8.26, 8.20, 8.25, 8.23, 8,23, 8.19, 8.28, 8.24.
(a) Verifique a suposição de normalidade para os diâmetros da barras.
(b) Determine um intervalo de confiança de 95% sobre o diâmetro médio das barras.

Solução
(a)

> $restart$

> $with(Statistics) :$

> $L := [8.24, 8.25, 8.20, 8.23, 8.24, 8.21, 8.26, 8.26, 8.20, 8.25, 8.23, 8.23, 8.19, 8.28, 8.24]$

$$L := [8.24, 8.25, 8.20, 8.23, 8.24, 8.21, 8.26, 8.26, 8.20, 8.25, 8.23, 8.23, 8.19, 8.28, 8.24] \quad \textbf{(4.1)}$$

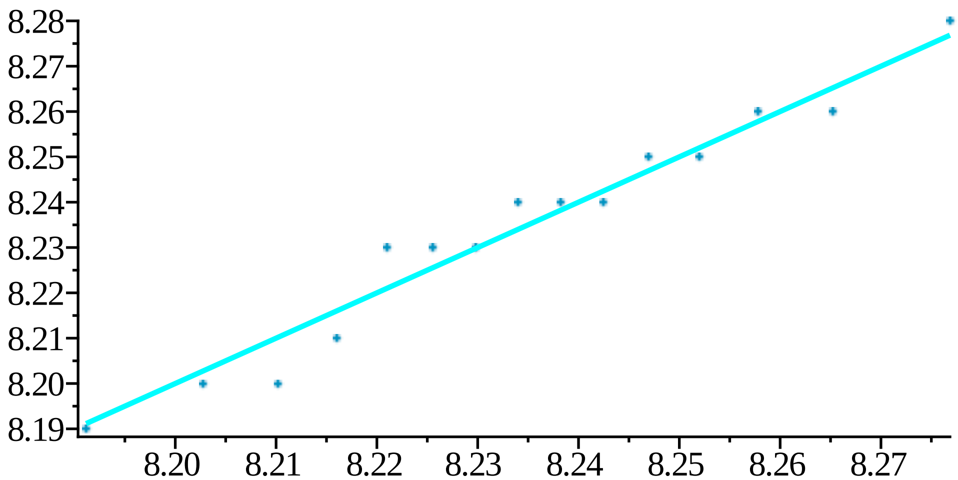
> $n := nops(L)$

$$n := 15 \quad \textbf{(4.2)}$$

>

Um plot normal mostra que a distribuição é aproximadamente normal (este item não será cobrado em prova):

> $NormalPlot(L, thickness = 2)$



(b)

A média é dada por

> $XM := Mean(L)$

$$XM := 8.234000000 \tag{4.3}$$

O desvio padrão da população é desconhecido, de modo que devemos estimá-lo:

> $s := \sqrt{\dfrac{sum\left((L[i] - XM)^2, i = 1..n\right)}{n-1}}$

$$s := 0.02529822128 \tag{4.4}$$

> ;

Como, além ter o desvio padrão desconhecido, a amostra é pequena, devemos usar a distribuição t para estimar o intervalo de confiança de média.

> $CD := 0 : t0 := -3 : k := n - 1 :$

> $X := RandomVariable(StudentT(k)) :$

> **while** $CD < 0.025$ **do**
> $CD := evalf(CDF(X, t0));$
> $t0 := t0 + 0.0001;$
> **od**:

> $t0$

$$-2.1446 \tag{4.5}$$

> $X1 := -evalf\left(\dfrac{t0 \cdot s}{\mathrm{sqrt}(n)}\right)$

$$X1 := 0.01400846854 \tag{4.6}$$

> $L1 := XM + X1; L2 := XM - X1$

$$L1 := 8.248008469$$

$$L2 := 8.219991531 \tag{4.7}$$

Portanto, o intervalo de confiança de 95% sobre a média é [8.219991531, 8.248008469]