

# CVE - 2007/2

Fernando Deeke Sasse  
Departamento de Matemática, UDESC - Joinville

## Respostas para a Prova 1

### - Procedimentos úteis

```
[ > restart :
[ > norma:=proc(L)
    local i;
    sqrt(L[1]^2+L[2]^2+L[3]^2) :
end:
[ > versor:=proc(u)
    local j,L,N;
    L:=[];
    N:=norma(u);
    for j to 3 do
        L:=[op(L), simplify(u[j]/N)]:
    od;
end:
[ > prodscalar:=proc(a,b)
    simplify(sum(a[i]*b[i],i=1..3)) :
end:
[ > prodvect:=proc(a,b)
    [a[2]*b[3]-a[3]*b[2], a[3]*b[1]-a[1]*b[3], a[1]*b[2]-a[2]*b[1]];
end:
[ > grad:=proc(G)
    [diff(G,x), diff(G,y), diff(G,z)]
end:
```

- 1. Seja a superfície definida por  $z = xy + x^2 + x - 3$ . Determine ponto desta superfície onde o plano tangente é perpendicular ao eixo  $x$ .

Solução:

```
[ > restart :
[ Definimos inicialmente um procedimento para calcular o gradiente de um escalar:
[ > grad:=proc(G)
    [diff(G,x), diff(G,y), diff(G,z)]
end:
[
```

[ Seja

[ > **Phi:=z - x\*y-x^2-x+3;**

$$\Phi := z - x y - x^2 - x + 3$$

Um vetor normal à superfície  $\Phi = 0$  em um ponto qualquer desta superfícies é dado por

[ > **N:=grad(Phi);**

$$N := [-y - 2x - 1, -x, 1]$$

Portanto, como este vetor deve ser paralelo a  $[0, 0, 1]$  devemos ter

[ > **V:=[0, 0, 1];**

$$V := [0, 0, 1]$$

[ > **eqs:={seq(N[i]=V[i], i=1..3)};**

$$eqs := \{1 = 1, -x = 0, -y - 2x - 1 = 0\}$$

[ > **sol:=solve(eqs, [x, y, z]);**

$$sol := [[x = 0, y = -1, z = z]]$$

[ > **assign(sol);**

[ > **z:=solve(Phi=0, z);**

$$z := -3$$

[ Portanto, o ponto buscado é dado por

[ > **[x, y, z];**

$$[0, -1, -3]$$

[ > **x:='x';y:='y';z:='z';**

$$x := x$$

$$y := y$$

$$z := z$$

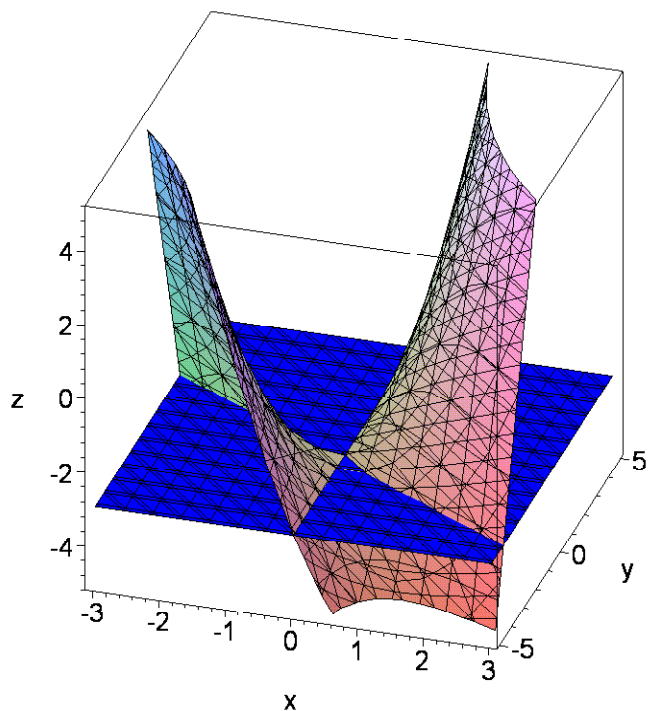
[ É interessante verificar a solução graficamente:

[ > **with(plots):**

[ > **sela:=implicitplot3d(Phi=0, x=-3..3,**  
[ **y=-5..5, z=-5..5, numpoints=2000):**

[ > **plano:=implicitplot3d(z=-3, x=-3..3,**  
[ **y=-5..5, z=-5..5, numpoints=2000, color=blue):**

[ > **display([sela,plano], axes=boxed);**



2. Uma partícula descreve uma trajetória definida por  $r(t) = [t^3, t^2 + 1, t]$ . Determine no instante  $t = 3$

- (i) a velocidade e a aceleração da partícula,
- (ii) a aceleração centrípeta e a aceleração tangencial,
- (iii) a reta binormal,
- (iv) a curvatura,
- (v) o plano osculador.

**Solução:**

(a)

[ > **restart**;

Em qualquer instante a posição da partícula é dada por

[ > **r := [t^3 + 1, t^2, t];**

$$r := [t^3 + 1, t^2, t]$$

[ A velocidade é dada por

[ > **v := diff(r, t);**

$$v := [3t^2, 2t, 1]$$

[ A aceleração é dada por

[ > **a := diff(v, t);**

$$a := [6t, 2, 0]$$

[ Em  $t = 3$ ,

[

```

> t:=3;
                                     t:=3
> r;v;a;
                                     [28, 9, 3]
                                     [27, 6, 1]
                                     [18, 2, 0]

```

(ii) Definamos procedimentos para calcular a norma, o produto vetorial e o produto escalar de vetores:

```

> norma:=proc(L)
  local i;
  sqrt(L[1]^2+L[2]^2+L[3]^2):
end:
> prodscalar:=proc(a,b)
  simplify(sum(a[i]*b[i],i=1..3)):
end:
> prodvect:=proc(a,b)
  [a[2]*b[3]-a[3]*b[2], a[3]*b[1]-a[1]*b[3], a[1]*b[2]-a[2]*b[1]];
end:

```

A aceleração tangencial é dada pela projeção

```

> at:=prodscalar(a,v)/(prodscalar(v,v))*v;
                                     at:=
                                     [ 6723  1494  249 ]
                                     [ 383   383   383 ]
> evalf(at);
                                     [17.55352480, 3.900783290, 0.6501305483]

```

A aceleração centrípeta agora é dada por

```

> ac:=a-at;
                                     ac:=
                                     [ 171  -728  -249 ]
                                     [ 383   383   383 ]
> evalf(ac);
                                     [0.4464751958, -1.900783290, -0.6501305483]

```

(iii) A reta binormal deve ter a direção do vetor

```

> B:=prodvect(v,a);
                                     B := [-2, 18, -54]

```

Portanto a reta binormal é dada por

```

> eqreta:=[(X-r[1])/B[1]=k, (Y-r[2])/B[2]=k, (Z-r[3])/B[3]=k];
                                     eqreta :=
                                     [ -X/2 + 14 = k, Y/18 - 1/2 = k, -Z/54 + 1/18 = k ]

```

(iv) O quadrado da curvatura é dado por

```

> ksq:=prodscalar(prodvect(v,a),prodvect(v,a))/prodscalar(v,v)^3;

```

$$ksq := \frac{811}{112363774}$$

Ou seja, a curvatura é dada por

```
> k:=sqrt(ksq);
```

$$k := \frac{\sqrt{91127020714}}{112363774}$$

```
> evalf(%);
```

$$0.002686564479$$

```
>
```

```
>
```

3. Seja a curva definida pela intersecção das superfícies  $z = x y^2 + x^2 + x - 3$  e  $z = x + y^2 + 3$ .

Determine a reta tangente a esta curva no ponto  $(2, \sqrt{2}, 7)$ .

**Solução:**

```
> restart;
```

```
> with(linalg):
```

A reta tangente no ponto

```
> r0:=[2, sqrt(2), 7];
```

$$r0 := [2, \sqrt{2}, 7]$$

Com

```
> Phi[1] := x*y^2+x^2+x-3-z ; Phi[2] := x+y^2+3-z ;
```

$$\Phi_1 := x y^2 + x^2 + x - 3 - z$$

$$\Phi_2 := x + y^2 + 3 - z$$

Vamos calcular os determinantes das matrizes

```
> D1:=matrix([[diff(Phi[1], y), diff(Phi[1], z)], [diff(Phi[2], y), diff(Phi[2], z)]]);
```

$$D1 := \begin{bmatrix} 2xy & -1 \\ 2y & -1 \end{bmatrix}$$

```
> D2:=matrix([[diff(Phi[1], z), diff(Phi[1], x)], [diff(Phi[2], z), diff(Phi[2], x)]]);
```

$$D2 := \begin{bmatrix} -1 & y^2 + 2x + 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> D3:=matrix([[diff(Phi[1], x), diff(Phi[1], y)], [diff(Phi[2], x), diff(Phi[2], y)]]);
```

$$D3 := \begin{bmatrix} y^2 + 2x + 1 & 2xy \\ 1 & 2y \end{bmatrix}$$

A reta tangente é então dada por

```
> x:=r0[1];y:=r0[2];z:=r0[3];
```

$$\begin{aligned}x &:= 2 \\y &:= \sqrt{2} \\z &:= 7\end{aligned}$$

```
> reta := [(X-r0[1])/det(D1)=k, (Y-r0[2])/det(D2)=k, (Z-r0[3])/det(D3)=k];
```

$$\text{reta} := \left[ -\frac{(X-2)\sqrt{2}}{4} = k, \frac{Y}{6} - \frac{\sqrt{2}}{6} = k, \frac{(Z-7)\sqrt{2}}{20} = k \right]$$

É interessante ilustrar graficamente a solução deste problema

```
> restart;
```

```
> with(plots):
```

```
> p1:=implicitplot3d(x*y^2+x^2+x-3-z, x=0..5, y=-6..6, z=-20..20, color=red):
```

```
> p2:=implicitplot3d(x+y^2+3-z, x=0..5, y=-6..6, z=-20..20, color=blue):
```

```
>
```

```
> reta := [-1/4*(X-2)*2^(1/2) = k, 1/6*Y-1/6*2^(1/2) = k, 1/20*(Z-7)*2^(1/2) = k];
```

$$\text{reta} := \left[ -\frac{(X-2)\sqrt{2}}{4} = k, \frac{Y}{6} - \frac{\sqrt{2}}{6} = k, \frac{(Z-7)\sqrt{2}}{20} = k \right]$$

```
> X1:=solve(reta[1], X); Y1:=solve(reta[2], Y); Z1:=solve(reta[3], Z);
```

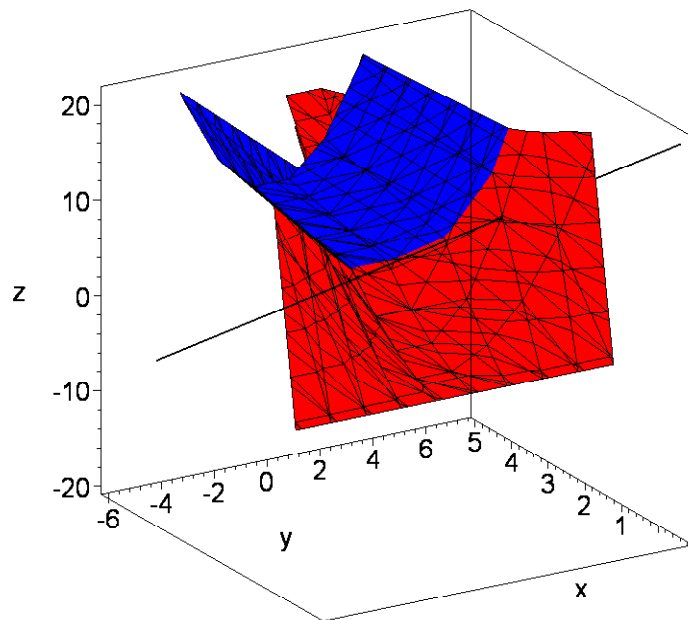
$$X1 := (\sqrt{2} - 2k)\sqrt{2}$$

$$Y1 := 6k + \sqrt{2}$$

$$Z1 := \frac{(7\sqrt{2} + 20k)\sqrt{2}}{2}$$

```
> p3:=spacecurve([X1, Y1, Z1], k=-1..1, color=black, thickness=2):
```

```
> display([p1, p2, p3], axes=boxed);
```



```
[ >  
[ >
```