Matemática Aplicada MAP0001 - 2009/2

Fernando Deeke Sasse
Departamento de Matemática, UDESC - Joinville

Soluções da Prova 1

1. [2] Encontre o vetor tangente, o vetor normal unitário e a curvatura do ciclóide $\{x = a(\theta - \sin\theta), y = a(1 - \cos\theta), z = 0\}$, onde $0 < \theta < 2\pi$.

Solução

> *restart*

> *with*(*VectorCalculus*) :

Para que o comando expand possa ser usado para fazer simplicações trigonométricas, definiremos $\phi = \frac{\theta}{2}$. Além disso, temos que informar ao sistema sobre o domínio de ϕ, para eliminar a ambiguidade do sinal de $\sin(2\phi)$:

> *assume*($a > 0$); *assume*(phi > 0, phi < Pi)

O vetor posição é definido por:

> $r := \langle a\,(2\,\phi - \sin(2\,\phi)),\, a\,(1 - \cos(2\,\phi))\rangle$

$$r := (a\sim(2\,\phi\sim - \sin(2\,\phi\sim)))e_x + (a\sim(1 - \cos(2\,\phi\sim)))e_y \tag{1.1}$$

O vetor velocidade é dado por

> $v := map\left(simplify, map\left(expand, \frac{\partial}{\partial\phi}\, r\right)\right)$

$$v := 4\,a\sim\sin(\phi\sim)^2 e_x + 4\,a\sim\sin(\phi\sim)\cos(\phi\sim)e_y \tag{1.2}$$

O seu módulo é:

> $vscalar := Norm(v)$

$$vscalar := 4\,a\sim\sin(\phi\sim) \tag{1.3}$$

O vetor tangente unitário é então dado por

> $\text{sigma} := \frac{v}{vscalar}$

$$\sigma := (\sin(\phi\sim))e_x + (\cos(\phi\sim))e_y \tag{1.4}$$

Notemos que $\frac{ds}{d\theta} = |v|$. Por outro lado,

$$\frac{d\,\sigma}{ds} = \frac{d\,\sigma}{d\theta}\,\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{|v|}\,\frac{d\,\sigma}{d\theta} = \kappa\, n$$

de modo que

$$\kappa = \frac{1}{|v|}\left|\frac{d\,\sigma}{d\theta}\right|$$

Como

$\frac{d\,\sigma}{d\theta}$ é dado por

> $dsigma := simplify\left(\frac{\partial}{\partial \phi}\,\sigma\right)$

$$dsigma := (\cos(\phi\sim))\,e_x - \sin(\phi\sim)\,e_y \tag{1.5}$$

a curvatura toma a forma

> $\kappa := \left(\frac{Norm(dsigma)}{vscalar}\right)$

$$\kappa := \frac{1}{4\,a\sim \sin(\phi\sim)} \tag{1.6}$$

O vetor normal unitário é então dado por

> $n := \frac{dsigma}{\kappa \cdot vscalar}$

$$n := (\cos(\phi\sim))\,e_x - \sin(\phi\sim)\,e_y \tag{1.7}$$

Usando os comando do pacote VectorCalculus podemos verificar nossos resultados:

> $\sigma 2 := map(simplify, map(expand, Normalize(TangentVector(r, \phi))))$

$$\sigma 2 := \begin{bmatrix} \sin(\phi\sim) \\ \cos(\phi\sim) \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

> $\sigma 2 := map(simplify, map(expand, TNBFrame(r, \phi)_1))$

$$\sigma 2 := \begin{bmatrix} \sin(\phi\sim) \\ \cos(\phi\sim) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

> $\kappa 2 := simplify(expand(Curvature(r, \phi)))$

$$\kappa 2 := \frac{1}{4\,a\sim \sin(\phi\sim)} \tag{1.10}$$

> $n2 := map(simplify, map(expand, TNBFrame(r, \phi)_2))$

$$n2 := \begin{bmatrix} \cos(\phi\sim) \\ -\sin(\phi\sim) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.11}$$

Expressando os resultados em termos de θ, temos

> $unassign(\mathrm{phi})$

> $\sigma 3 := subs\left(\phi = \frac{\theta}{2}, \sigma\right)$

$$\sigma 3 := \left(\sin\left(\frac{1}{2}\,\theta\right)\right) e_x + \left(\cos\left(\frac{1}{2}\,\theta\right)\right) e_y \tag{1.12}$$

> $\kappa 3 := subs\left(\phi = \frac{\theta}{2}, \kappa\right)$

$$\kappa 3 := \frac{1}{4\, a\sim \sin\left(\frac{1}{2}\,\theta\right)} \qquad \textbf{(1.13)}$$

> $n3 := subs\left(\phi = \frac{\theta}{2}, n2\right)$

$$n3 := \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{1}{2}\,\theta\right) \\ -\sin\left(\frac{1}{2}\,\theta\right) \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(1.14)}$$

> ;

2. [6] Uma partícula descreve uma trajetória definida por $r(t) = [t^3, \sin t, t+1]$. Determine no instante $t = 3$:
(i) Os vetores velocidade e a aceleração da partícula;
(ii) Os vetores aceleração centrípeta e aceleração tangencial;
(iii) As retas tangente, binormal e normal principal;
(iv) A curvatura;
(v) O plano osculador;
(vi) A integral que dá o comprimento da curva entre $t = 0$ e $t = 2\,\pi$ (não é necessário calcular a integral);
(vii) O vetor velocidade angular relativamente à origem e relativamente ao centro de curvatura da curva (intrínseco);

Solução:

Ao contrário do que fizemos na primeira questão, esolveremos as questões acima sem o auxílio de nenhum pacote do Maple.

(i)

```
> restart:
```

Em qualquer instante a posição da partícula é dada por

```
> r:=[t^3, sin(t), t+1 ];
```

$$r := [t^3, \sin(t), t+1] \qquad \textbf{(2.1)}$$

A velocidade é dada por

```
> v:=diff(r,t);
```

$$v := [3\,t^2, \cos(t), 1] \qquad \textbf{(2.2)}$$

A aceleração é dada por

```
> a:=diff(v,t);
```

$$a := [6\,t, -\sin(t), 0] \qquad \textbf{(2.3)}$$

Em $t = 3$,

```
> t:=3.;
```

$$t := 3. \qquad \textbf{(2.4)}$$

```
> r;v;a;
```

$$[27., 0.1411200081, 4.]$$

$$[27., -0.9899924966, 1]$$

$$[18., -0.1411200081, 0] \tag{2.5}$$

(ii) Definamos procedimentos para calcular a norma, o produto vetorial e o produto escalar de vetores:

```
> norma:=proc(L)
     local i;
     sqrt(L[1]^2+L[2]^2+L[3]^2):
  end:
```

```
> prodscalar:=proc(a,b)
     simplify(sum(a[i]*b[i],i=1..3)):
  end:
```

```
> prodvect:=proc(a,b)
    [a[2]*b[3]-a[3]*b[2],a[3]*b[1]-a[1]*b[3],a[1]*b[2]-a[2]*b
  [1]];
  end:
```

A aceleração tangencial é dada pela projeção

```
> at:=prodscalar(a,v)/(prodscalar(v,v))*v;
```

$$at := [17.95640179, -0.6583964088, 0.6650519181] \tag{2.6}$$

```
> evalf(at);
```

$$[17.95640179, -0.6583964088, 0.6650519181] \tag{2.7}$$

A aceleração centrípeta agora é dada por

```
> ac:=a-at;
```

$$ac := [0.04359821, 0.5172764007, -0.6650519181] \tag{2.8}$$

```
> ac:=evalf(ac);
```

$$ac := [0.04359821, 0.5172764007, -0.6650519181] \tag{2.9}$$

(iii)

Reta tangente:

```
> eqretatan := [(X-r[1])/v[1] = k, (Y-r[2])/v[2] = k, (Z-r[3])
  /v[3] = k];
```

$$eqretatan := [0.03703703704\ X - 1.000000000 = k,\ -1.010108666\ Y + 0.1425465431 = k,\ Z - 4. = k] \tag{2.10}$$

A reta binormal deve ter a direção do vetor

```
> B:=prodvect(v,a);
```

$$B := [0.1411200081, 18., 14.00962472] \tag{2.11}$$

Portanto a reta binormal é dada por

```
> eqretabin:=[(X-r[1])/B[1]=k,(Y-r[2])/B[2]=k,(Z-r[3])/B[3]=k];
```

$$eqretabin := [7.086167394\ X - 191.3265196 = k,\ 0.05555555556\ Y - 0.007840000451 = k,\ 0.07137949945\ Z - 0.2855179978 = k] \tag{2.12}$$

Reta normal principal:

```
> eqretanorm := [(X-r[1])/ac[1] = k, (Y-r[2])/ac[2] = k, (Z-r[3])/ac[3] = k];
```

$$eqretanorm := [22.93672148\,X - 619.2914800 = k,\ 1.933202440\,Y - 0.2728135440 = k,\ -1.503642006\,Z + 6.014568024 = k] \quad (2.13)$$

(iv) O quadrado da curvatura é dado por

```
> ksq:=prodscalar(prodvect(v,a),prodvect(v,a))/prodscalar(v,v)^3;
```

$$ksq := 0.000001332074227 \quad (2.14)$$

Ou seja, a curvatura é dada por

```
> k:=sqrt(ksq);
```

$$k := 0.001154155201 \quad (2.15)$$

```
> evalf(%);
```

$$0.001154155201 \quad (2.16)$$

(v) O plano osculador é dado por

```
> prodscalar(B, [X-r[1], Y-r[2], Z-r[3]]) = 0;
```

$$0.1411200081\,X - 62.38889924 + 18.\,Y + 14.00962472\,Z = 0 \quad (2.17)$$

(vi) O comprimento da curva no intervalo $[0, 2\pi]$ é dado por

```
> t :='t'
```

$$t := t \quad (2.18)$$

```
> I1 := Int(norma(v), t = 0 .. 2*Pi);
```

$$I1 := \int_0^{2\pi} \sqrt{9\,t^4 + \cos(t)^2 + 1}\,\mathrm{d}t \quad (2.19)$$

Tal integral não possui solução exata, mas pode ser resolvida numericamente:

```
> I1 := evalf(%);
```

$$I1 := 249.0358658 \quad (2.20)$$

(viii) A velocidade angular relativamente à origem é dada em módulo por

```
> t := 3.;
```

$$t := 3. \quad (2.21)$$

```
> omega1 := prodvect(r, v)/norma(r)^2;
```

$$\omega 1 := [0.005504671636, 0.1087219259, -0.04099224332] \quad (2.22)$$

A velocidade angular intrínseca tem módulo

```
> wscalar2:=norma(v)/(1/k);
```

$$wscalar2 := 0.03120448257 \quad (2.23)$$

Sua direção é oposta à direção do vetor binormal:

```
> omega2 := -wscalar2*B/norma(B);
```

$$\omega 2 := [-0.0001930558862, -0.02462447387, -0.01916553543] \quad (2.24)$$

```
> ;
```

Ela pode também ser calculada pela fórmula:

```
> omega2 := prodvect(a, v)/norma(v)^2;
```

$$\omega 2 := [-0.0001930558861, -0.02462447385, -0.01916553542] \quad \textbf{(2.25)}$$

3. [2] Seja a curva definida pela intersecção das superfícies $z = x\,y^2 + x - 3$ e $z = x + y^2 + 3$. Determine a reta tangente a esta curva no ponto ($\frac{5}{2}$, 2, $\frac{19}{2}$).

Solução:

```
> restart:
> with(linalg):
> Phi[1] := x*y^2+x-3-z;
```

$$\Phi_1 := x\,y^2 + x - 3 - z \quad \textbf{(3.1)}$$

```
> Phi[2] :=  x+y^2+3-z;
```

$$\Phi_2 := x + y^2 + 3 - z \quad \textbf{(3.2)}$$

```
> r0:=[5/2, 2, 19/2];
```

$$r0 := \left[\frac{5}{2}, 2, \frac{19}{2}\right] \quad \textbf{(3.3)}$$

Vamos calcular os determinantes das matrizes

```
> D1:=matrix([[diff(Phi[1],y),diff(Phi[1],z)],[diff(Phi[2],y),
  diff(Phi[2],z)]]);
```

$$D1 := \begin{bmatrix} 2\,x\,y & -1 \\ 2\,y & -1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.4)}$$

```
> D2:=matrix([[diff(Phi[1],z),diff(Phi[1],x)],[diff(Phi[2],z),
  diff(Phi[2],x)]]);
```

$$D2 := \begin{bmatrix} -1 & y^2 + 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.5)}$$

```
> D3:=matrix([[diff(Phi[1],x),diff(Phi[1],y)],[diff(Phi[2],x),
  diff(Phi[2],y)]]);
```

$$D3 := \begin{bmatrix} y^2 + 1 & 2\,x\,y \\ 1 & 2\,y \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.6)}$$

A reta tangente é então dada por

```
> x:=r0[1];y:=r0[2];z:=r0[3];
```

$$x := \frac{5}{2}$$

$$y := 2$$

$$z := \frac{19}{2} \quad \textbf{(3.7)}$$

```
> reta:=[(X-r0[1])/det(D1)=k,(Y-r0[2])/det(D2)=k,(Z-r0[3])/det(D3)=k];
```

$$reta := \left[-\frac{1}{6} X + \frac{5}{12} = k, \frac{1}{4} Y - \frac{1}{2} = k, \frac{1}{10} Z - \frac{19}{20} = k \right] \quad \textbf{(3.8)}$$

É interessante ilustrar graficamente a solução deste problema

```
> restart;
> with(plots):
> p1:=implicitplot3d(x*y^2+x-3-z,x=-3..5,y=-6..6,z=-20..20,color=grey):
> p2:=implicitplot3d(x+y^2+3-z,x=-3..5,y=-6..6,z=-20..20,color=green):
> reta := [-(1/6)*X+5/12 = k, (1/4)*Y-1/2 = k, (1/10)*Z-19/20 = k];
```

$$reta := \left[-\frac{1}{6} X + \frac{5}{12} = k, \frac{1}{4} Y - \frac{1}{2} = k, \frac{1}{10} Z - \frac{19}{20} = k \right] \quad \textbf{(3.9)}$$

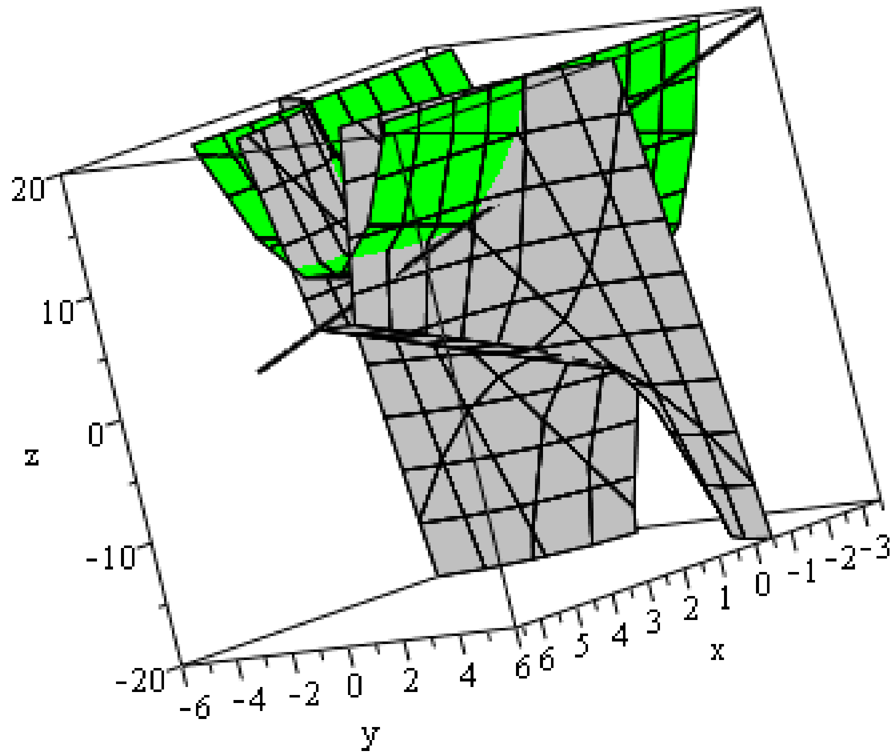
```
> X1:=solve(reta[1],X);Y1:=solve(reta[2],Y);Z1:=solve(reta[3],Z);
```

$$X1 := \frac{5}{2} - 6\,k$$

$$Y1 := 2 + 4\,k$$

$$Z1 := \frac{19}{2} + 10\,k \quad \textbf{(3.10)}$$

```
> p3:=spacecurve([X1,Y1,Z1],k=-0.7..1,color=black,thickness=2):
> display([p1,p2,p3],axes=boxed);
```


20
10
0
z
-10
-20
-6 -4 -2 0 2 4 6
y
6 5 4 3 2 1 0 -1 -2 -3
x

>