

# Distribuições Discretas

EST0003, 2009/2

Prof. Fernando Deeke Sasse

Problemas Resolvidos

## Distribuição Discreta Geral

1. Suponha que a função discreta  $f(x)$  é definida pela seguinte tabela:

$x$	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	$1/8$	$2/8$	$2/8$	$2/8$	$1/8$

Determine (a)  $P(X \leq 2)$ , (b)  $P(X > -2)$ , (c)  $P(-1 \leq X \leq 1)$ , (d)  $P(X \leq 1 \text{ ou } X=2)$ , (e) A média e a variância de  $X$ .

(a)

> restart

>  $P(X \leq 2) := 1$

$$P(X \leq 2) := 1$$

(1.1)

(b)

>  $P(x > -2) := \frac{1}{4} \cdot 3 + \frac{1}{8}$

$$P(-2 < x) := \frac{7}{8}$$

(1.2)

(c)

>  $P(-1 \leq X \leq 1) := \frac{3 \cdot 2}{8}$

$$P(-1 \leq X \text{ and } X \leq 1) := \frac{3}{4}$$

(1.3)

(d)

>  $P(X \leq 1 \text{ ou } X=2) := 1$

$$P(\text{false}) := 1$$

(1.4)

(e)

>  $\mu := -2 \cdot \left(\frac{1}{8}\right) - 1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) + 1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)$

$$\mu := 0$$

(1.5)

>  $V(X) := (-2 - \mu)^2 \cdot \left(\frac{1}{8}\right) + (-1 - \mu)^2 \cdot \left(\frac{2}{8}\right) + (0 - \mu)^2 \cdot \frac{2}{8} + (1 - \mu)^2 \cdot \left(\frac{2}{8}\right) + (2 - \mu)^2 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)$

$$V(X) := \frac{3}{2}$$

(1.6)

## Distribuição Binomial

1. Lotes de 50 peças são examinados. O número médio de peças não-conformes em um lote é 5. Seja  $X$  a variável aleatória binomial que denota o número de peças não conformes.

(a) Quem são  $n$  e  $p$  ?

(b) Determine  $P(X \leq 2)$  e  $P(X \geq 49)$ .

Solução

(a)  $n = 50, p = \frac{5}{50} = 0.1.$

(b)

```
[> restart
[> with(Statistics) :
[> n := 50; p := 0.1
                                     n := 50
                                     p := 0.1                                (1)
```

```
[> Pb := x → binomial(n, x) p^x (1 - p)^(n - x) :
[> P(X ≤ 2) := sum(Pb(x), x = 0..2)
                                     P(X ≤ 2) := 0.1117287563                (2)
```

```
[> Pb(49); Pb(50)
                                     4.50 10^-48
                                     1.0 10^-50                                (3)
```

Ou seja,  $P(X \geq 49)$  é praticamente zero.

2 Como nem todos passageiros de uma companhia aérea chegam para ocupar suas vagas reservados, uma companhia vende 125 tickets para um vôo de somente 120 passageiros. A probabilidade de que um passageiro não apareça é 0.1 e os passageiros se comportam de modo independente.

(a) Qual é a probabilidade de que cada passageiro que aparecer consiga um lugar ?

(b) Qual é a probabilidade de que um vôo parta com assentos vazios ?

Solução

(a) Seja  $X$  a variável aleatória que denota o número de passageiros que não comparecem. Cada passageiro terá seu lugar se  $X \geq 5$ . Então  $X$  é uma variável binomial com  $p = 0.1$  e  $n = 125$  e devemos determinar aqui  $P(5 \leq X) = 1 - P(X \leq 4)$ .

```
[> restart
[> with(Statistics) :
[> n := 125; p := 0.1
                                     n := 125
                                     p := 0.1                                (4)
```

```
[> P := x → binomial(n, x) p^x (1 - p)^(n - x) :
[> for x from 0 to 4 do P(x) end do:
[> 1 - (∑_{k=0}^4 P(k))
                                     0.9961414046                                (5)
```

(b) A probabilidade de que o voo parta vazio é  $P(5 < X) = 1 - P(X \leq 5)$ . Ou seja,

$$\left[ \begin{array}{l} > 1 - \text{sum}(P(k), k = 0 .. 5); \\ & \qquad \qquad \qquad 0.9885678128 \end{array} \right. \quad (6)$$

3. Um processo de manufatura tem 100 ordens para cumprir. Cada ordem requer um componente que deve ser comprado de um fornecedor. No entanto, tipicamente 1.5% dos componentes são identificados como defeituosos. Se o fabricante estoca N componentes, determine a probabilidade de que as 100 ordens possam ser cumpridas sem necessidade de comprar mais componentes nos seguintes casos: (a) N = 100, (b) N = 102, (c) N = 110.

Solução

Seja X a variável aleatória binomial com  $p = 0.015$ , que denota a quantidade de componentes defeituosos. Queremos determinar

(a) Queremos determinar  $P(X=0)$

$$\left[ \begin{array}{l} > restart \\ > with(Statistics) : \\ > p := 0.015 : \\ > Pb := (x, n) \rightarrow \text{binomial}(n, x) p^x (1 - p)^{n - x} \\ & \qquad \qquad \qquad Pb := (x, n) \rightarrow \text{binomial}(n, x) p^x (1 - p)^{n - x} \end{array} \right. \quad (7)$$

$$\left[ \begin{array}{l} > Pb(0, 100) \\ & \qquad \qquad \qquad 0.2206089105 \end{array} \right. \quad (8)$$

Ou seja, a chance é relativamente pequena.

(b) Aqui queremos determinar  $P(X \leq 2)$ .

$$\left[ \begin{array}{l} > P(X \leq 2) = \sum_{k=0}^2 Pb(k, 100) \\ & \qquad \qquad \qquad P(X \leq 2) = 0.8098050652 \end{array} \right. \quad (9)$$

>

(c)

$$\left[ \begin{array}{l} > P(X \leq 5) = \sum_{k=0}^5 Pb(k, 100) \\ & \qquad \qquad \qquad P(X \leq 5) = 0.9959093432 \end{array} \right. \quad (10)$$

Portanto, um pequeno aumento no estoque implica em um grande aumento na probabilidade de se cumprir uma ordem sem a necessidade de comprar mais componentes. Notemos também que um aumento muito grande no estoque não é necessário.

4. Um teste de múltipla escolha contém 25 questões, cada uma com 4 respostas. Suponha que um estudante somente adivinha as questões.

(a) Qual é a probabilidade de que o estudante responda mais do que 20 questões corretamente?

(b) Qual é a probabilidade de que o estudante responda menos do que 3 questões corretamente?

Solução

(a)

$$\left[ \begin{array}{l} > restart \\ > with(Statistics) : \\ > p := 0.25 : n := 25 : \\ > Pb := x \rightarrow \text{binomial}(n, x) p^x (1 - p)^{n - x} : \\ > P(X \geq 20) := \text{sum}(Pb(x), x = 20 .. 25) \end{array} \right.$$

$$P(20 \leq X) := 1.243460090 \cdot 10^{-8} \quad (11)$$

(b)

$$\begin{aligned} > P(X \leq 3) := \text{sum}(Pb(x), x=0..3) \\ & P(X \leq 3) := 0.09621407473 \end{aligned} \quad (12)$$

> with(plots) :

Podemos plotar todas as probabilidades:

$$\begin{aligned} > xdata := [\text{seq}(x, x=0..n)] \\ xdata := [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25] \end{aligned} \quad (13)$$

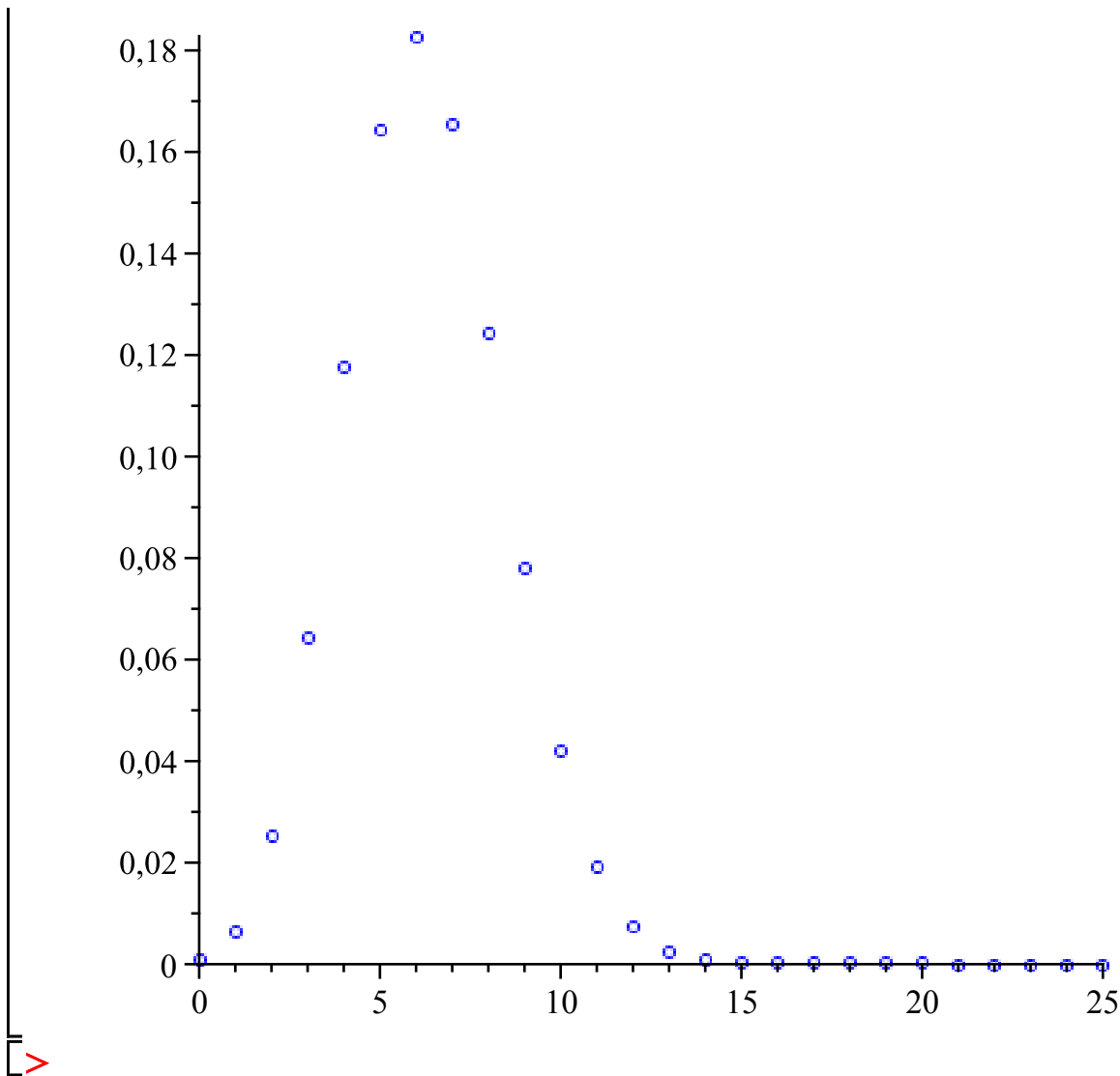
$$\begin{aligned} > ydata := [\text{seq}(Pb(x), x=0..n)] \\ ydata := [0.0007525434582, 0.006271195488, 0.02508478194, 0.06410555386, \end{aligned} \quad (14)$$

0.1175268487, 0.1645375882, 0.1828195424, 0.1654081575, 0.1240561181,  
0.07810940771, 0.04165835076, 0.01893561397, 0.007363849883, 0.002454616627,  
0.0007013190361, 0.0001714335422, 0.00003571532131, 0.000006302703756,  
9.337338902  $\cdot 10^{-7}$ , 1.146690742  $\cdot 10^{-7}$ , 1.146690742  $\cdot 10^{-8}$ , 9.100720176  $\cdot 10^{-10}$ ,  
5.515587987  $\cdot 10^{-11}$ , 2.398081734  $\cdot 10^{-12}$ , 6.661338148  $\cdot 10^{-14}$ , 8.881784197  $\cdot 10^{-16}$ ]

$$\begin{aligned} > PL1 := \text{PointPlot}(ydata, xcoords=xdata, color=blue, symbol=circle) \\ PL1 := \text{PLOT}(\dots) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} > \sum_{k=0}^n Pb(k) \\ & 1. \end{aligned} \quad (16)$$

> display(PL1)



5. Um produto eletrônico contém 40 circuitos integrados. A probabilidade de que qualquer circuito (CI) integrado falhe é 0.01, e os todos eles são independentes. O produto opera somente se todos os CIs funcionam. Qual a probabilidade de que o produto funcione?

Solução.

Seja  $X$  a variável aleatória binomial que denota o número de componentes que falham. Então

```
[> restart
[> with(Statistics) :
[> p := 0.01 : n := 40 :
[> Pb := x → binomial(n, x) p^x (1 - p)^(n - x)
                                Pb := x → binomial(n, x) p^x (1 - p)^(n - x) (17)
```

```
[> P(X=0) := Pb(0)
                                P(X=0) := 0.6689717586 (18)
```

Portanto, a probabilidade de que o produto funcione é de 66,9%.

### Distribuição Geométrica

1. Um site da web é operado por 4 servidores idênticos. Somente um é usado para operar o sites. Os outros são reservas que podem ser ativados no caso em que o servidor ativo falha. A probabilidade de

que uma requisição ao site falhe no servidor que está ativo é 0.0001. Suponha que cada requisição é uma amostragem independente. Qual é o tempo médio até que ocorra uma falha em todos os 4 computadores ?

Solução.

Seja  $X$  a variável aleatória que denota o número de requisições até que os 4 computadores falhem.

Temos aqui uma distribuição geométrica negativa, com  $p = 0.0001$ ,  $r = 4$ .

$$\begin{array}{l}
 \text{[> restart :} \\
 \text{[> } p := 0.0001 : r := 4 : \\
 \text{[> } \mu := r/p \\
 \qquad \qquad \qquad \mu := 40000.00000 \qquad \qquad \qquad (19)
 \end{array}$$

2. Uma sistema de produção pára após serem detectadas três falhas de produção. Suponha que a probabilidade de falha é 0.001 e que cada processo é independente.

(a) Qual é o número médio de processos até que o sistema pare?

(b) Qual é o desvio-padrão do número de processos até que o sistema pare?

Solução.

$$\begin{array}{l}
 \text{(a)} \\
 \text{[> restart} \\
 \text{[> } r := 3. : p := 0.001 : \\
 \text{[> } \mu := \frac{r}{p} \\
 \qquad \qquad \qquad \mu := 3000.000000 \qquad \qquad \qquad (20)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{(b)} \\
 \text{[> } \sigma := \left( \frac{r(1-p)}{p^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 \qquad \qquad \qquad \sigma := 1731.184566 \qquad \qquad \qquad (21) \\
 \text{[>}
 \end{array}$$

3. A probabilidade de sucesso em um alinhamento óptico na montagem de um aparelho é 0.8. Suponha que as tentativas são independentes.

(a) Qual é a probabilidade de que o primeiro alinhamento de sucesso exija exatamente 4 tentativas?

(b) Qual é a probabilidade de que o primeiro alinhamento de sucesso exija no máximo 4 tentativas?

(c) Qual é a probabilidade de que o primeiro alinhamento de sucesso exija no mínimo 4 tentativas?

Solução

Temos aqui uma distribuição geométrica

$$\begin{array}{l}
 \text{[> restart} \\
 \text{[> } fg := x \rightarrow (1-p)^{(x-1)} p \\
 \qquad \qquad \qquad fg := x \rightarrow (1-p)^{x-1} p \qquad \qquad \qquad (22)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{(a)} \\
 \text{[> } p := 0.8 \\
 \qquad \qquad \qquad p := 0.8 \qquad \qquad \qquad (23)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{[> } P(X=4) := fg(4) \\
 \qquad \qquad \qquad P(X=4) := 0.0064 \qquad \qquad \qquad (24)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{(b)} \\
 \text{[> } P(X \leq 4) := sum(fg(x), x=1..4) \\
 \qquad \qquad \qquad P(X \leq 4) := 0.9984000000 \qquad \qquad \qquad (25)
 \end{array}$$

(c)

```
[ > P(X ≥ 4) := 1 - sum(fg(x), x = 1 .. 3)
      P(4 ≤ X) := 0.0080000000 ]
```

(26)

4. Suponha que cada uma se suas chamadas a um serviço de cancelamento de assinatura de TV a cabo tenha uma probabilidade 0.05 de ter sucesso (não obter um sinal de linha ocupada). Suponha que todas as chamadas são independentes.

- (a) Qual é a probabilidade de que a primeira conexão seja feita na oitava chamada?  
 (b) Qual é a probabilidade de que seja necessário efetuar mais de cinco chamadas para conseguir uma ligação?  
 (c) Qual é o número médio de chamadas até conseguir uma ligação?

(a)

```
[ > restart;
  > with(Statistics):
  > Pg := (x, r) -> p*(1-p)^(x-1);
      Pg := (x, r) → p (1 - p)x-1 ]
```

(27)

```
[ > p := 0.5e-1;
      p := 0.05 ]
```

(28)

```
[ > Pg(8);
      0.03491686480 ]
```

(29)

(b)

```
[ > 1-(sum(Pg(i), i = 1 .. 5));
      0.7737809375 ]
```

(30)

(c)

```
[ > mu := 1/p;
      μ := 20.00000000 ]
```

(31)

## Distribuição Binomial Negativa

1. Uma companhia possui 8 computadores. A probabilidade de falha de um computador em um dia é de 0.01 e os computadores falham independentemente. Computadores são consertados de noite e cada dia é uma amostragem independente.

- (a) Qual é a probabilidade de que os 8 computadores falhem no mesmo dia?  
 (b) Qual é o número médio de dias até que um específico computador falhe?  
 (c) Qual é o número médio de dias até que 2 computadores falhem no mesmo dia?  
 (d) Qual é a probabilidade de que 2 computadores falhem simultaneamente em até 30 dias?  
 (e) Qual é a probabilidade de haja ao menos 2 falhas simultâneas de computadores em até 30 dias?  
 (f) Qual é a probabilidade de que não haja nenhuma falha simultânea em 30 dias?

Solução.

Seja  $X$  a variável aleatória binomial negativa que denota o número de dias até que  $r$  computadores falhem.

```
[ > restart
  > with(Statistics) :
  > Pbn := (x, r) → binomial(x - 1, r - 1) pr (1 - p)x-r ]
```

$$Pbn := (x, r) \rightarrow \text{binomial}(x-1, r-1) p^r (1-p)^{x-r} \quad (32)$$

(a)  $p := 0.01 :$

(b)  $P := p^8$   
 $P := 1.10^{-16}$  (33)

(c)  $\mu := \frac{1}{p}$   
 $\mu := 100.$  (34)

(d)  $\mu := \frac{2}{p}$   
 $\mu := 200.$  (35)

(e)  $\text{sum}(Pbn(x, 2), x = 1 .. 30)$   
 $0.03614799831$  (36)

(f)  $\text{sum}(\text{sum}(Pbn(x, r), r = 2 .. 8), x = 1 .. 30)$   
 $0.03970037338$  (37)

(g)  $1 - \text{sum}(\text{sum}(Pbn(x, r), r = 1 .. 8), x = 1 .. 30)$   
 $0.7000000000$  (38)

2.

## Distribuição Hipergeométrica

1 Placas de circuito impresso são testadas. Um lote contém 130 peças e 15 são selecionadas, sem substituição, para teste.

(a) Se 10 placas são defeituosas, qual é a probabilidade de que ao menos 1 placa defeituosa ocorra na amostra ?

(b) Se 15 placas são defeituosas, qual é a probabilidade de que ao menos 1 placa defeituosa apareça na amostra ?

Solução.

Temos aqui uma distribuição hipergeométrica.

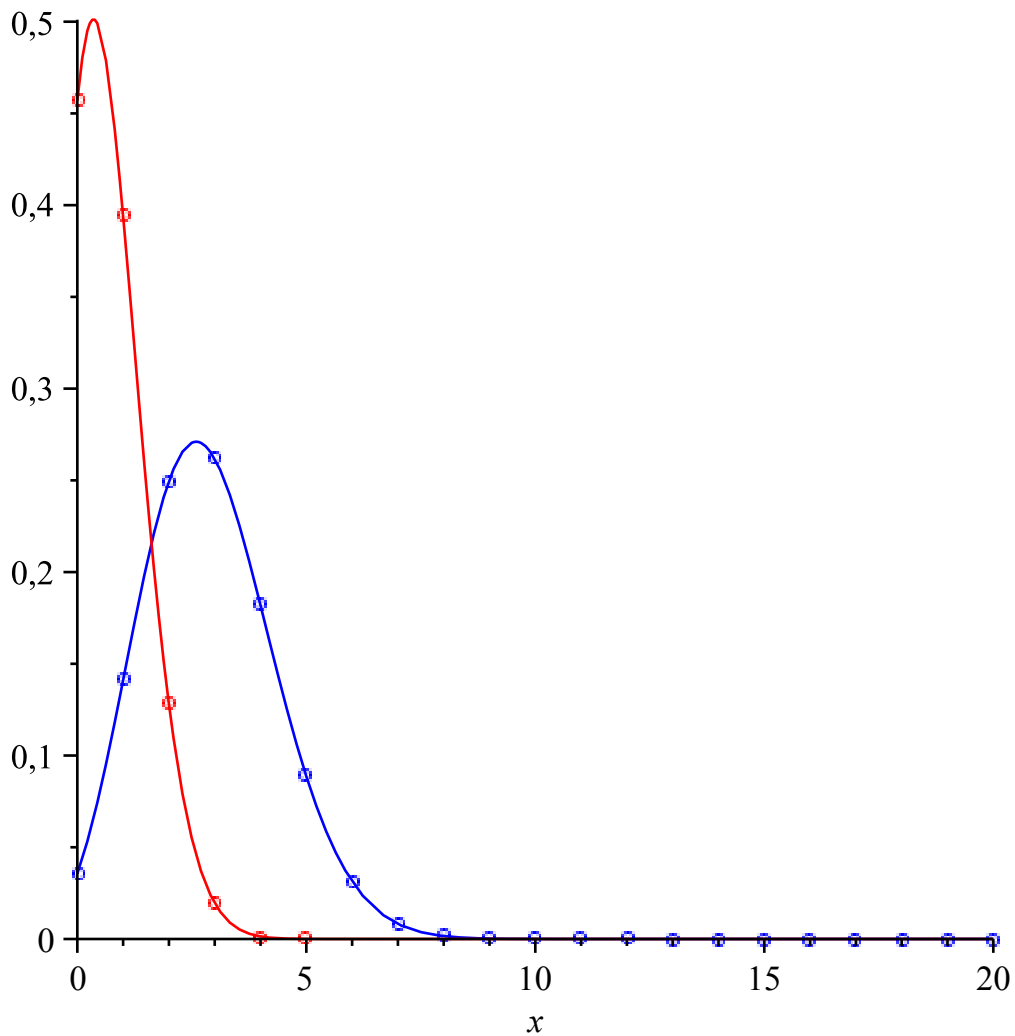
(a)

$$\begin{aligned} &> \text{restart} \\ &> N := 130 : n := 15 : K := 10 : p := K/N; \\ & \quad \quad \quad p := \frac{1}{13} \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} &> fhg := x \rightarrow \text{evalf} \left( \frac{\text{binomial}(K, x) \text{binomial}(N-K, n-x)}{\text{binomial}(N, n)} \right) \\ & \quad \quad \quad fhg := x \rightarrow \text{evalf} \left( \frac{\text{binomial}(K, x) \text{binomial}(N-K, n-x)}{\text{binomial}(N, n)} \right) \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} &> 1 - fhg(0) \\ & \quad \quad \quad 0.7201950397 \end{aligned} \quad (41)$$





[> ;

3. Use a aproximação binomial para a distribuição hipergeométrica para a aproximar as probabilidades do problema anterior. Determine o termo de correção de população finita.

Solução

[>  $Pb := (x, n, p) \rightarrow \text{binomial}(n, x) p^x (1-p)^{n-x} :$

(a)

[>  $p1 := \frac{20.}{140} ;$

$p1 := 0.1428571429$

(49)

[>  $P(X \geq 2) = 1 - Pb(0, 20, p1) - Pb(1, 20, p1)$

$P(2 \leq X) = 0.8014424961$

(50)

(b)

[>  $p2 := \frac{5.}{140}$

$p2 := 0.03571428571$

(51)

[>  $P(X \geq 2) = 1 - Pb(0, 20, p2) - Pb(1, 20, p2)$

(52)

$$P(2 \leq X) = 0.1588978363$$

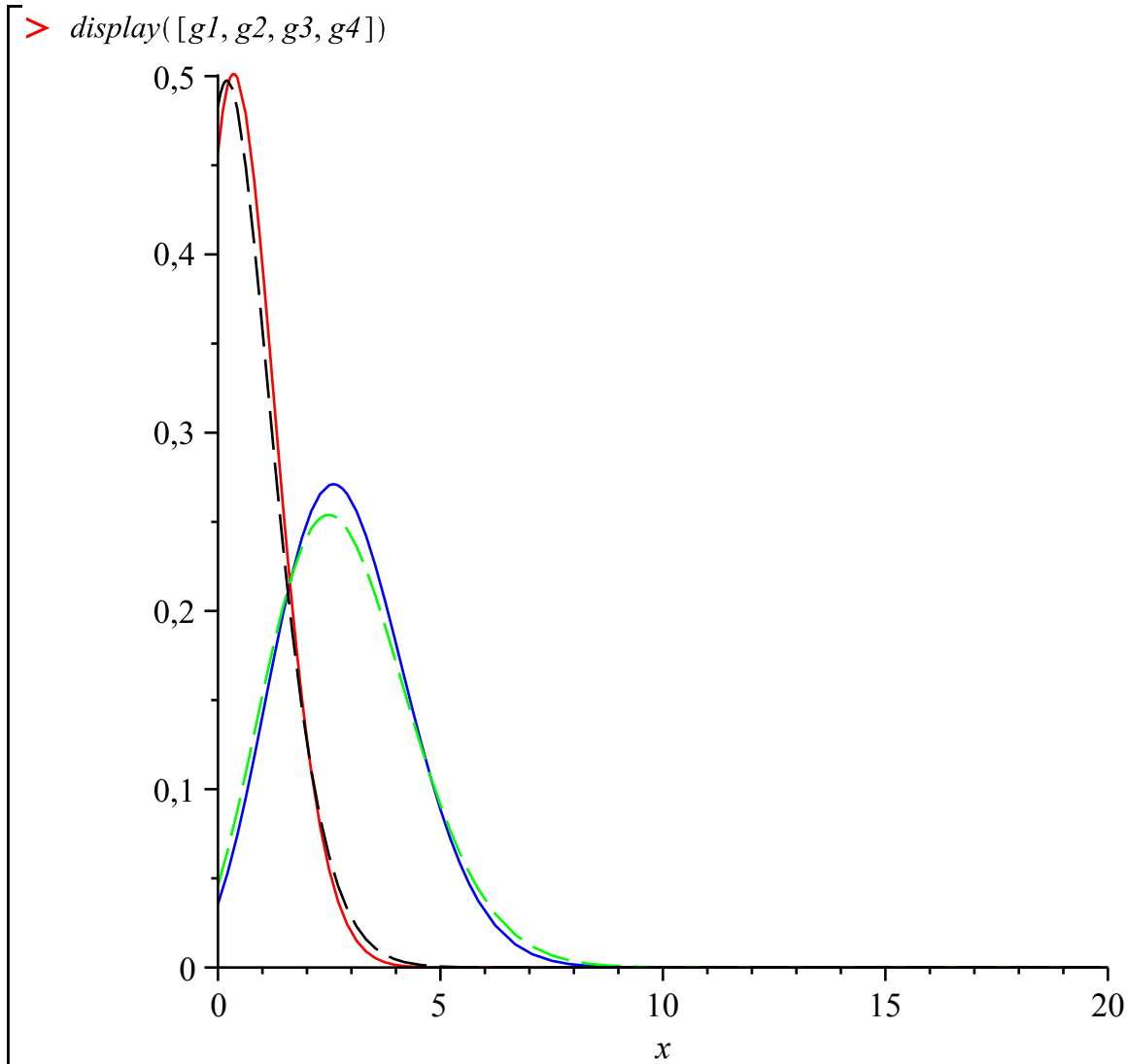
(52)

(c)

```
> g3 := plot(Pb(x, 20, p1), x=0..20, color=green, linestyle=dash) :
```

```
> g4 := plot(Pb(x, 20, p2), x=0..20, color=black, linestyle=dash) :
```

```
> display([g1, g2, g3, g4])
```



A correção de população finita (termo de correção binomial) é dada por

$$\frac{N-n}{N-1} ,$$

ou seja,

```
> evalf( (N-n)/(N-1) )
```

0.8633093525

(53)

4. Um lote de 200 peças contém 35 que são defeituosas. Três peças são selecionadas aleatoriamente e sem substituição. Utilize somente conceitos de probabilidade rudimentares para resolver as questões abaixo. Em seguida verifique os resultados usando a distribuição hipergeométrica.

(a) Qual a probabilidade de que a terceira seja defeituosa?

(b) Qual a probabilidade de que todas sejam defeituosas?

- (c) Qual a probabilidade de que ao menos uma seja defeituosa?  
 (d) Qual a probabilidade de que no máximo duas sejam defeituosas?

Solução

(a) Denotemos por D evento de que uma peça seja defeituosa e N que seja sem defeito. Devemos calcular

$$P(NND)+P(NDD)+P(DND)+P(DDD)$$

```
> restart
> P(NND) := 155/300 * 154/199 * 45/198; evalf(%)
P(NND) := 217/2388
0.09087102178 (54)
```

```
> P(NDD) := 165/200 * 35/199 * 34/198; evalf(%)
P(NDD) := 119/4776
0.02491624791 (55)
```

```
> P(DND) := 35/200 * 165/199 * 34/198; evalf(%)
P(DND) := 119/4776
0.02491624791 (56)
```

```
> P(DDD) := 35/200 * 34/199 * 33/198; evalf(%)
P(DDD) := 119/23880
0.004983249581 (57)
```

```
> P(NND) + P(NDD) + P(DND) + P(DDD); evalf(%)
3479/23880
0.1456867672 (58)
```

```
(b)
> P(DDD) := 35/200 * 34/199 * 33/198; evalf(%)
P(DDD) := 119/23880
0.004983249581 (59)
```

(c) Devemos somar  $P(DDD)+P(DDN)+P(NDD)+P(DND)+P(DNN)+P(NDN)+P(NND)$ . Alguns termos já foram calculados no item anterior. Os que faltam são:

```
> PT := P(DDD) + P(DDN) + P(NDD) + P(DND) + P(DNN) + P(NDN) + P(NND)
PT := 3479/23880 + P(DDN) + P(DNN) + P(NDN) (60)
```

$$\begin{aligned} > P(DDN) := \frac{35}{200} \cdot \frac{34}{199} \cdot \frac{165}{198}; P(DNN) := \frac{35}{200} \cdot \frac{165}{199} \cdot \frac{164}{198}; P(NDN) := \frac{165}{200} \cdot \frac{35}{199} \\ & \cdot \frac{164}{198} \end{aligned}$$

$$P(DDN) := \frac{119}{4776}$$

$$P(DNN) := \frac{287}{2388}$$

$$P(NDN) := \frac{287}{2388}$$

(61)

> PT; evalf(%)

$$\frac{4907}{11940}$$

$$0.4109715243$$

(62)

(d) Devemos calcular P(NNN)+P(DNN)+P(NDN)+P(NND)+P(DDN)+P(NDD)+P(DND)

> PT := P(NNN) + P(DNN) + P(NDN) + P(NND) + P(DDN) + P(NDD) + P(DND)

$$PT := P(NNN) + \frac{1939}{4776}$$

(63)

> P(NNN) :=  $\frac{165}{200} \cdot \frac{164}{199} \cdot \frac{163}{198}$

$$P(NNN) := \frac{6683}{11940}$$

(64)

> PT; evalf(%)

$$\frac{7687}{7960}$$

$$0.9657035176$$

(65)

Podemos checar os resultados (b), (c) e (d) utilizando a distribuição hipergeométrica

> fhg := x → evalf(binomial(K, x) \* binomial(N-K, n-x) / binomial(N, n));

$$fhg := x \rightarrow evalf\left(\frac{\text{binomial}(K, x) \text{binomial}(N - K, n - x)}{\text{binomial}(N, n)}\right)$$

(66)

> K := 45; N := 300; n := 7

$$K := 45$$

$$N := 300$$

$$n := 7$$

(67)

(b)

> fhg(7)

$$0.000001122186856$$

(68)

(c)

> sum(fhg(x), x=3..7)

$$0.07147057862$$

(69)

(d)

> sum(fhg(x), x=0..4)

$$0.9989690772$$

(70)

## Distribuição de Poisson

1. O número de automóveis que atravessam uma ponte durante um determinado período de tempo é uma variável aleatória com distribuição de Poisson. Admita que 0.25 é a probabilidade de não passar nenhum automóvel em 10 minutos.

(a) Qual é a probabilidade de não passar nenhum em carro em 20 minutos?

(b) Qual a probabilidade de, numa hora, atravessarem a ponte menos de 4 automóveis ?

**Solução.**

Seja  $X$  a variável aleatória de Poisson que denota o número de carros que passa pela ponte no tempo de 10 min. A distribuição de Poisson é dada por

```
> fp := (x, lambda) -> exp(-lambda) * lambda^x / x!;
```

$$fp := (x, \lambda) \rightarrow \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \quad (71)$$

Devemos agora determinar o parâmetro  $\lambda$ :

```
> eq := fp(0, lambda) = 0.25;
```

$$eq := e^{-\lambda} = 0.25 \quad (72)$$

```
> lambda := ln(4);
```

$$\lambda := 2 \ln(2) \quad (73)$$

(a) Em 20 min o valor esperado dobra (supondo que a distribuição não depende do tempo).

```
> lambda2 := 2 * lambda;
```

$$\lambda_2 := 4 \ln(2) \quad (74)$$

```
> fp(0, lambda2);
```

$$\frac{1}{16} \quad (75)$$

Em 1 h, o valor esperado deve ser multiplicado por 6:

```
> lambda3 := 6 * lambda;
```

$$\lambda_3 := 12 \ln(2) \quad (76)$$

Portanto,

```
> sum(fp(x, lambda3), x=0..3);
```

$$\frac{1}{4096} + \frac{3}{1024} \ln(2) + \frac{9}{512} \ln(2)^2 + \frac{9}{128} \ln(2)^3 \quad (77)$$

```
> evalf(%);
```

$$0.03413610423 \quad (78)$$