Erro no método trapezoidal

F. D. Sasse

Esta dedução segue este vídeo (http://www.youtube.com/watch?v=NAIGuh5I3Io) do Prof. L. A. F. Coelho. Consideremos o erro cometido na aplicação do método trapezoidal aplicado a um único intervalo. Se pudéssemos saber que a primitiva de $f(x)$ é $F(x)$, poderíamos escrever para a integral no intervalo $[x_0, x_0+h]$:

$$I_{exata} = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,\mathrm{d}x = F(x_0+h) - F(x_0).$$

A integral aproximada é dada pela fórmula da área do trapézio:

$$I_{aprox} = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_0+h)\right].$$

O erro cometido na integração numérica é então definido por

$$E = I_{exata} - I_{aprox}.$$

Usando a expansão em série de Taylor temos

$$F(x_0+h) = F(x_0) + F'(x_0)h + \frac{F''(x_0)}{2!}h^2 + \frac{F'''(x_0)}{3!}h^3 + \cdots.$$

Como $F'(x) = f(x)$,

$$F(x_0+h) = F(x_0) + f(x_0)h + \frac{f'(x_0)}{2}h^2 + \frac{f''(x_0)}{3!}h^3 + \cdots.$$

Portanto, a integral exata torna-se

$$I_{exata} = f(x_0)h + \frac{f'(x_0)}{2}h^2 + \frac{f''(x_0)}{3!}h^3 + \cdots.$$

Por outro lado,

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}h^3 + \cdots,$$

de modo que

$$I_{aprox} = \frac{h}{2}\left[2f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}h^3 + \cdots\right]$$

e

$$E = I_{exata} - I_{aprox} = \frac{f''(x_0)}{3!}h^3 - \frac{f''(x_0)}{4}h^3 + \mathrm{O}(h^4) = -\frac{f''(x_0)}{12}h^3 + \mathrm{O}(h^4).$$

Truncando a série em $\mathrm{O}(h^4)$ temos que, de acordo com o teorema de Taylor, o erro é dado por

$$E = -\frac{f''(\xi)}{12}h^3,$$

onde $x_0 < \xi < x_0 + h$.