MATEMÁTICA APLICADA MAP0001

Prof. Fernando Deeke Sasse
Departamento de Matemática - UDESC

EXERCÍCIOS - 9/10/2009

1. No problema abaixo f é um campo escalar, $\mathbf{F}$ é um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{r}$ o vetor posição e $r = |\mathbf{r}|$. Prove as seguintes relações:

$$\nabla \cdot (f\,\mathbf{F}) = f\nabla \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla f\,, \tag{1}$$

$$\nabla \cdot (\phi(r)\,\mathbf{r}) = 3f(r) + rf'(r)\,, \tag{2}$$

$$\nabla \cdot (r^{n-1}\mathbf{r}) = (n+2)r^{n-1}\,, \tag{3}$$

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) = 0\,, \tag{4}$$

$$\nabla^2 f(r) = \frac{2}{r}f'(r) + f''(r)\,. \tag{5}$$

2. Seja $\mathbf{F} = (2xy\,\mathrm{e}^z, x^2\,\mathrm{e}^z, x^2y\mathrm{e}^z + z^2)$. Determine uma função $f(x,y,z)$ tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

3. O campo vetorial $\mathbf{F}$ é dito *solenoidal* se $\mathbf{F}$ é diferenciável e $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$. $\mathbf{F}$ é chamado *irrotacional* se $\mathbf{F}$ é diferenciável e $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Prove que se $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ são irrotacionais, então $\mathbf{F} \times \mathbf{G}$ é solenoidal.

4. Um campo escalar ϕ é dito harmônico se $\nabla^2\phi = 0$. Mostre que se ϕ é harmônico então $\nabla\phi$ é solenoidal e irrotacional.

5. Se $\phi = \phi(u)$ e $u = u(x,y,z)$, mostre que

$$\nabla\phi(u) = \phi'\nabla u\,. \tag{6}$$

6. Utilize coordenadas esféricas para provar as seguintes relações:

$$\nabla f(r) = f'(r)\,\mathbf{e}_r\,, \tag{7}$$

$$\nabla \cdot [f(r)\,\mathbf{r}] = 3f(r) + rf'(r)\,, \tag{8}$$

$$\nabla^2 f(r) = \frac{2}{r}f'(r) + f''(r)\,. \tag{9}$$

7. Se $\mathbf{F} = (x, 2y, z)$, calcule explicitamente

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{10}$$

de $(0,0,0)$ a $(1,1,1)$ ao longo de (i) uma reta que conecta os dois pontos e (ii) um caminho formado pelos segmentos que vão de $(0,0,0$ a $(1,0,0)$, depois a $(1,1,0)$ e $(1,1,1)$.

8. Verifique se a integral (6) é independente do caminho. Em caso positivo, obtenha novamente o valor da integral sem fazer o cálculo explícito.

9. Um campo vetorial $\mathbf{F}$ é dado por $(z^2 + 2xy, x^2 + 2yz, y^2 + 2zx)$. Mostre qe $\mathbf{F}$ é conservativo. Em seguida calcule a integral de linha (10) ao longo de qualquer caminho ligando $(1, 1, 1)$ a $(1, 2, 2)$. R.: 11.

10. Calcule $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ para $\mathbf{F} = (y, (x + z)^2, (x - z)^2)$ de $(0, 0, 0)$ a $(2, 4, 0)$ ao longo (i) da parábola $y = x^2$, $z = 0$ e (ii) da reta $y = 2x$. R.: (i) 32/3, (ii) 28/3.

11. Seja F definido em coordenadas cilíndricas usuais por

$$\mathbf{F}(\rho, \phi) = f_\rho(\rho, \phi)\mathbf{e}_\rho + f_\phi(\rho, \phi)\mathbf{e}_\phi \,. \tag{11}$$

Mostre que $\nabla \times \mathbf{F}$ tem somente uma componente z.

12. As coordenadas parabólicas cilíndricas (ξ, η, z) são definidas em termos de coordenadas cartesianas por

$$x = \xi\eta \,, \qquad y = \frac{1}{2}(\eta^2 - \xi^2) \,, \quad z = z \,. \tag{12}$$

(i) Mostre que os fatores de escala são dados por

$$h_\xi = h_\eta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \,, \quad h_z = 1 \,. \tag{13}$$

(ii) Determine o operador ∇ nestas coordenadas.

13. Calcule

$$\int_S d\mathbf{S} \,, \tag{14}$$

onde:
(i) S é o hemisfério superior da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. R. : $\pi a^2(0, 0, 1)$.
(ii) S é toda a superfície esférica. R.: $(0, 0, 0)$.

14. Sendo $\mathbf{F} = (y^2 + x^3, x^4)$, use o teorema de Green para calcular

$$\int_{C^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \,, \tag{15}$$

onde C^+ é o perímetro do quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ na direção anti-horária. R.: 0.

15. Calcule, tomando a orientação de C no sentido anti-horário e usando qualquer método, a integral

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \,, \tag{16}$$

nos seguintes casos:
(a) $\mathbf{F} = (y^2, 2xy)$, $C = \{x = a\cos\, t,\ y = a\sin\, t\}$. R.: 0.

(b) $\mathbf{F} = (y, -x)$, $C = \{x = a\cos\,t,\ y = b\sin\,t\}$. R.: $-2\pi ab$.
(c) $\mathbf{F} = (x/(x^2+y^2), -y/(x^2+y^2))$, $C = \{x = a\cos\,t,\ y = a\sin\,t\}$. R.: 0.
(d) $\mathbf{F} = (y/(x^2+y^2), x/(x^2+y^2))$, C é o segmento da reta $y = x$ de $x = 1$ a $x = 2$. R.: $\ln 2$.
(e) $\mathbf{F} = (x, -y)$, $C = \{x = a\cos^3\,t,\ y = a\sin^3\,t\}$, C é um arco da hipociclóide. R.: $3/4\pi a^2$.
(f) $\mathbf{F} = (x, -y)$, $C = \{x = a(t - \sin\,t),\ y = a(1 - \sin\,t)\}$, C é um arco da ciclóide ($0 \leq t \leq 2\pi$). R.: $-6\pi a^2$.
(g) $\mathbf{F} = (y(4x^2+y^2), x(2x^2+3y^2))$, C corresponde ao caminho completo em volta da elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

16. Utilize o teorema de Green e resultados do problema anterior para calcular:
(i) A área sob um arco da hipociclóide definido por $x = a\cos^3\,t,\ y = a\sin^3\,t$.
(ii) A área sob um arco da ciclóide definido por $x = a(t - \sin\,t),\ y = a(1 - \sin\,t)$.

17. Utilize o teorema de Green para calcular a área de uma pétala da rosácea definida em coordadas polares por $r = 3\cos\theta$.

18. Verifique o teorema de Stokes,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}\,, \tag{17}$$

nos seguintes casos:
(i) $\mathbf{F} = (y+z, z+x, x+y)$, C é uma circunferência definida por $x^2+y^2+z^2 = a^2,\ x+y+z = 0$. R.: 0.
(ii) $\mathbf{F} = (x^2y^3, 1, z)$, C é uma circunferência definida por $x^2+y^2 = a^2,\ z = 0$. R.: $-\pi a^6/8$.

19. Calcule

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}\,, \tag{18}$$

onde $\mathbf{F} = (x, 0, 0)$ e S é a superfície do hemisfério $x^2+y^2+z^2 = a^2$, $z \geq 0$. [Sug.: use coordenadas polares]. R.: $2\pi a^3/3$.