Geometria Diferencial de Curvas Espaciais

Fernando Deeke Sasse
Departamento de Matemática
CCT UDESC

1 Aceleração tangencial e centrípeta

Mostremos que a aceleração de uma partícula viajando ao longo de uma trajetória $r(t)$ é dada por

$$\vec{\boldsymbol{a}}(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\sigma} + \frac{v^2}{R}\vec{\boldsymbol{n}} \qquad (1.1)$$

onde $v = |\vec{\boldsymbol{v}}|$ é o módulo da velocidade da partícula. Usando o elemento de comprimento de arco

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \qquad (1.2)$$

podemos escrever

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{\sigma} = v\,\vec{\sigma}, \qquad (1.3)$$

de modo que

$$\vec{\boldsymbol{a}}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{v}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(v\,\vec{\sigma}\right)}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\sigma} \qquad (1.4)$$

Por outro lado,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}}{\mathrm{d}s} = vK\vec{\boldsymbol{n}} = \frac{v}{R}\vec{\boldsymbol{n}}, \qquad (1.5)$$

onde R é o raio de curvatura da curva num dado ponto. substituindo (1.5) em (1.3) obtemos

$$\vec{\boldsymbol{a}}(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\sigma} + \frac{v^2}{R}\vec{\boldsymbol{n}}\ . \qquad (1.6)$$

O primeiro termo é a componente tangencial da aceleração, paralela ao vetor velocidade. A segunda é a chamada aceleração centrípeta, normal ao vetor velocidade.

Determinemos as componentes tangencial e normal da aceleração $\vec{\boldsymbol{a}}$, sendo $\vec{\boldsymbol{a}}$ e $\vec{\boldsymbol{v}}$ conhecidos. Sejam

$$\vec{\boldsymbol{v}} = v(t)\vec{\sigma}, \qquad \vec{\boldsymbol{a}} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\sigma} + v\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}}{\mathrm{d}t}. \qquad (1.7)$$

Devemos aqui reescrever a aceleração como

$$\vec{\boldsymbol{a}} = a_t\vec{\sigma} + a_n\vec{\boldsymbol{n}}\ , \qquad (1.8)$$

onde a_t e a_n denotam as componentes tangencial e normal (centrípeta) da aceleração, respectivamente. Fazendo o produto escalar de (E1.2) por $\vec{\boldsymbol{v}}$ obtemos

$$\vec{\boldsymbol{a}} \bullet \vec{\boldsymbol{v}} = a_t\vec{\sigma} \bullet v\,\vec{\sigma} = a_t\,v\,, \qquad (1.9)$$

de modo que

$$a_t = \frac{\vec{\boldsymbol{a}} \bullet \vec{\boldsymbol{v}}}{v}\ . \qquad (E1.4)$$

Por outro lado, fazendo o produto vetorial de (E1.2) por $\vec{\boldsymbol{v}}$ obtemos

$$\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{v}} = \left(a_t\vec{\sigma} + a_n\vec{\boldsymbol{n}}\right) \times \vec{\boldsymbol{v}} = a_n\vec{\boldsymbol{n}} \times v\,\vec{\sigma} = a_n v\left(-\vec{\boldsymbol{b}}\right). \qquad (1.10)$$

Tomando o módulo em ambos os lados obtemos, finalmente,

$$a_n = \frac{|\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{v}}|}{v}\ . \qquad (1.11$$

2 Velocidade e aceleração angular em torno de um eixo

Quando uma partícula move-se numa trajetória circular, a taxa de variação da posição angular relativamente ao centro é chamada *velocidade angular*:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} . \qquad (2.1)$$

Consideremos agora uma partícula que se move instantaneamente ao longo de uma circunferência instantânea de raio *R*, em torno do eixo de rotação (perpendicular ao plano do movimento), como mostado na Figura 1.

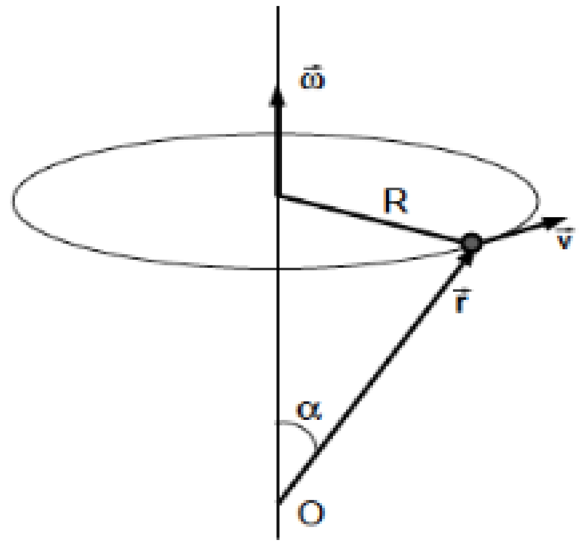


Fig.1 Partícula girando em torno de um eixo.

A posição da partícula é denotada por $\vec{r}$, que tem como origem um ponto arbitrário O sobre o eixo de rotação e a velocidade é

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{ds} . \qquad (2.2)$$

O módulo instantâneo da velocidade pode ser dado por

$$v = R\frac{d\theta}{dt} = R\,\omega = r \sin\alpha\,\omega. \qquad (2.3)$$

Notemos que a direção da velocidade linear $\vec{v}$ é perpendicular a $\vec{r}$ e está no plano da circunferência.

É conveniente determinar uma representação vetorial para a velocidade angular. Notemos que se a partícula move-se instantaneamente em um plano, a normal a este plano define a direção do vetor binormal. Definimos a direção do vetor velocidade angular como sendo a mesma do vetor binormal. Se escrevermos

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \qquad (2.4)$$

obteremos consistência com as definições acima. Note que tal definição é válida somente se a origem estiver sobre o eixo de rotação.

A aceleração centrípeta é definida por

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \qquad (2.5)$$

Podemos então expressar a aceleração linear como

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right)}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right). \qquad (2.6)$$

Usando a identidade

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}, \qquad (2.7)$$

podemos reescrever o segundo termo como

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{r}) = (\vec{\omega} \cdot \vec{r})\vec{\omega} - \omega^2 \vec{r}. \qquad (2.8)$$

Portanto,

$$\vec{a} = \vec{\boldsymbol{\alpha}} \times \vec{r} + (\vec{\omega} \cdot \vec{r})\vec{\omega} - \omega^2 \vec{r}, \qquad (2.9)$$

de modo que $\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{r}) = (\vec{\omega} \cdot \vec{r})\vec{\omega} - \omega^2 \vec{r}$ é a aceleração centrípeta e $\vec{\boldsymbol{\alpha}} \times \vec{r}$ a aceleração tangencial. Notemos que se escolhermos a origem O de tal modo que $\vec{\omega} \cdot \vec{r} = 0$, temos

$$\vec{a} = \vec{\boldsymbol{\alpha}} \times \vec{r} - \omega^2 \vec{r}. \qquad (2.10)$$

3 Velocidade angular intrínseca

Um ponto ou uma partícula movendo-se arbitrariamente no espaço pode ser considerado *em um dado instante*, como movendo-se em um plano numa trajetória circular em torno de um dado eixo. O raio R da trajetória é igual ao raio de curvatura da trajetória no dado ponto. Ou seja, a trajetória que a partícula descreve durante um intervalo de tempo infinitesimal δt é pode ser representada por uma arco infinitesimal de circunferência. A linha que passa pelo centro da circunferência e é perpendicular à direção instantânea do movimento é chamada *eixo instantâneo de rotação.* A velocidade angular associada, de módulo $\omega = v/R$, onde v é o módulo da velocidade da partícula, é chamada *velocidade angular intrínseca.* Tal situação é ilustrada na Figura 2.

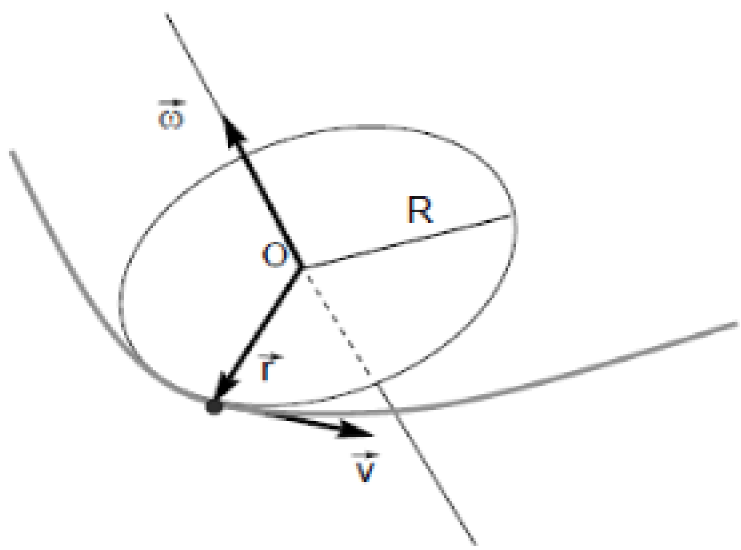


Fig.2 Velocidade angular intrínseca de uma partícula

Como nossa análise de geometria diferencial da curva é válida para qualquer origem O, ela pode ser feita, em particular com a escolha da origem no centro da circunferência de raio R, sobre o eixo de rotação instantâneo. Portanto, podemos escrever

$$\vec{v} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{r} \qquad (3.1)$$

Faendo o produto vetorial do vetor normal $\vec{n}$ por $\vec{v}$ definido acima obtemos

$$\vec{n} \times \vec{v} = \vec{n} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{r}) = (\vec{n} \cdot \vec{r})\vec{\boldsymbol{\omega}} - (\vec{n} \cdot \vec{\boldsymbol{\omega}})\vec{r}. \qquad (3.3)$$

Como $\vec{n} \cdot \vec{r} = -r$ e $\vec{n} \cdot \vec{\boldsymbol{\omega}} = 0$, obtemos

$$\vec{n} \times \vec{v} = -\vec{\boldsymbol{\omega}} r, \qquad (3.4)$$

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} = -\frac{\vec{n} \times \vec{v}}{r} \;. \qquad (3.5)$$

Como r é aqui o raio de curvatura local da curva, podemos escrever

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} = -\kappa\, \vec{n} \times \vec{v} = -\frac{1}{R}\, \vec{n} \times \vec{v} \,, \qquad (3.6)$$

onde κ é a curvatura local da curva. Notemos agora que

$$\kappa \vec{n} = -\frac{1}{R}\vec{n} = -\frac{1}{v^4}\vec{v} \times (\vec{a} \times \vec{v}). \qquad (3.7)$$

onde $\vec{a}$ é a aceleração da partícula. De fato, como $\vec{a}$ está no plano definido por $\vec{r}$ e $\vec{v}$ o produto $\vec{a} \times \vec{v}$ é perpendicular a este plano e consequentemente $\vec{v} \times (\vec{a} \times \vec{v})$ tem a mesma direção de $\vec{n}$. Verifiquemos a igualdade dos módulos. Tomando o módulo no termo do lado direito da equação acima, e sabendo que $|\vec{a} \times \vec{v}| = a_c v = v^3/R$, temos

$$\left| \frac{1}{v^4}\vec{v} \times (\vec{a} \times \vec{v}) \right| = \frac{1}{R} \;. \qquad (3.8)$$

Portanto,

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} = \left[\frac{1}{v^4}\vec{v} \times (\vec{a} \times \vec{v}) \right] \times \vec{v} = \frac{1}{v^4}\left[v^2 \vec{a} - (\vec{v} \cdot \vec{a})\vec{v} \right] \times \vec{v} = \frac{\vec{a} \times \vec{v}}{v^2} \;. \qquad (3.9)$$

4 Velocidade angular relativa a um ponto qualquer

Suponhamos que a trajetória da partícula é descrita relativamente a uma origem arbitrária. Como mostrado na Figura 3, é conveniente decompor o vetor velocidade numa soma de um vetor paralelo a $\vec{r}$, denotado por $\vec{v}_{\parallel}$ e outro vetor ortogonal a $\vec{r}$, denotado por $\vec{v}_{\perp}$, de modo que

$$\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp} \;. \qquad (4.1)$$

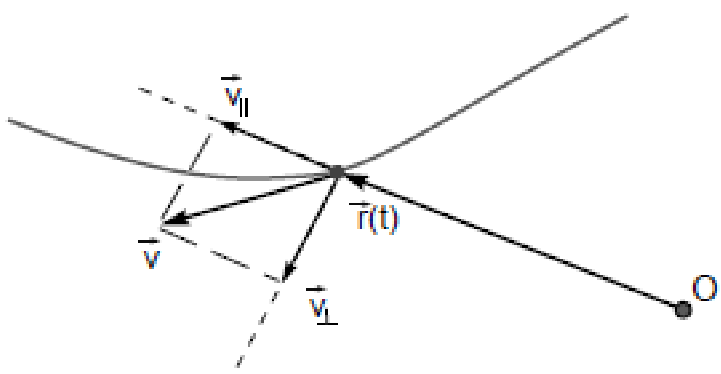


Fig.3 Velocidade angular intrínseca de uma partícula

Podemos então escrever

$$\vec{v}_{\perp} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{r} \,, \qquad (4.2)$$

onde $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ é a velocidade angular instantânea da partícula, relativamente a um observador situado em O. O eixo de rotação é a reta que passa por O e é instantaneamente ortogonal ao plano definido por $\vec{r}$ e $\vec{v}$. Fazendo o produto vetorial de $\vec{r}$ por $\vec{v}_{\perp}$ definido acima obtemos

$$\vec{r} \times \vec{v}_{\perp} = \vec{r} \times \left(\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{r}\right) = r^2 \vec{\boldsymbol{\omega}} - \left(\vec{r} \cdot \vec{\boldsymbol{\omega}}\right)\vec{r}. \qquad (4.3)$$

Como o último termo é nulo, podemos escrever

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} = \frac{\vec{r} \times \vec{v}_{\perp}}{r^2} = \frac{\vec{r} \times \left(\vec{v}_{\perp} + \vec{v}_{\parallel}\right)}{r^2} = \frac{\vec{r} \times \vec{v}}{r^2} \;. \qquad (4.4)$$

Exercício. Calcule a velocidade angular intrínseca e a velocidade angular relativa à origem de uma partícula que segue uma trajetória definida por $r(t) = \left(t^2, \sin(t), \cos(2\,t)\right)$, em $t=5$.

Exemplos

E1 Curvatura e tríade de Serret-Frenet

Exemplo 1 Seja a curva dada por $\vec{\boldsymbol{r}}(t) := \left(t^2 - t\sin(t), \sin(3\,t), t^2 - 8\,t + t\cos(2\,t)\right)$. Determinemos gráfico da curva no intervalo $[0, 2\,\pi]$.

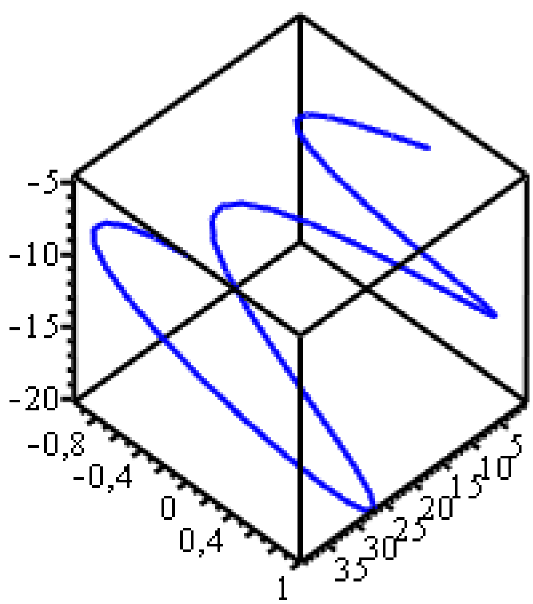
> $restart:$

> $with(VectorCalculus):$

> $r := \langle t^2 - t\sin(t), \sin(3\,t), t^2 - 8\,t + t\cos(2\,t)\rangle$

$$r := \left(t^2 - t\sin(t)\right)e_x + \left(\sin(3\,t)\right)e_y + \left(t^2 - 8\,t + t\cos(2\,t)\right)e_z \quad (1)$$

> $SpaceCurve\left(r, t = 1\,..2\cdot\pi, color = blue, thickness = 2, axes = box\right)$



O raio de curvatura médio neste intervalo é

$$R_m = \frac{\Delta s}{\Delta\varphi}\,,$$

onde Δs é o comprimento de arco do intervalo e $\Delta\varphi$ é o ângulo entre os vetores tangentes definidos nos extremos dos intervalos. O vetor tangente em qualquer ponto é dado por

> $v := TangentVector(r, t);$

$$v := \begin{bmatrix} 2\,t - \sin(t) - t\cos(t) \\ 3\cos(3\,t) \\ 2\,t - 8 + \cos(2\,t) - 2\,t\sin(2\,t) \end{bmatrix} \quad (2)$$

> $vi := subs(t = 1., v);\ vf := subs(t = 3., v)$

$$vi := \begin{bmatrix} 0.6182267091 \\ -2.969977490 \\ -8.234741690 \end{bmatrix}$$

$$vf := \begin{bmatrix} 8.828857482 \\ -2.733390786 \\ 0.636663276 \end{bmatrix} \tag{3}$$

O ângulo entre estes vetores é:

> $with(LinearAlgebra):$

> $VectorAngle(vi, vf)$

$$\arccos(0.01230005859\,(2. - \sin(1.) - 1.\cos(1.))\,(6. - \sin(3.) - 3.\cos(3.)) + 0.1107005273\cos(3.)\cos(9.) + 0.01230005859\,(-6. + \cos(2.) - 2.\sin(2.))\,(-2. + \cos(6.) - 6.\sin(6.))) \tag{4}$$

> $\Delta\varphi := evalf(\%)$

$$\Delta\varphi := 1.468112364 \tag{5}$$

O comprimento de arco é

$$s = \int_0^3 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\,dt$$

> $Int\left(\mathrm{sqrt}\left(\left(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2\right)\right), t = 0..3\right)$

$$\int_0^3 \sqrt{(2t - \sin(t) - t\cos(t))^2 + 9\cos(3t)^2 + (2t - 8 + \cos(2t) - 2t\sin(2t))^2}\,dt \tag{6}$$

> $\Delta s := evalf(\%)$

$$\Delta s := 21.45378628 \tag{7}$$

Portanto, o raio de curvatura médio é dado por

> $R_m := \frac{\Delta s}{\Delta\varphi}$

$$R_m := 14.61317731 \tag{8}$$

O raio de curvatura é qualquer ponto é

> $\mathrm{R} := \mathrm{evalf}(\mathrm{simplify}(RadiusOfCurvature(r)))$

$$R := \tag{9}$$

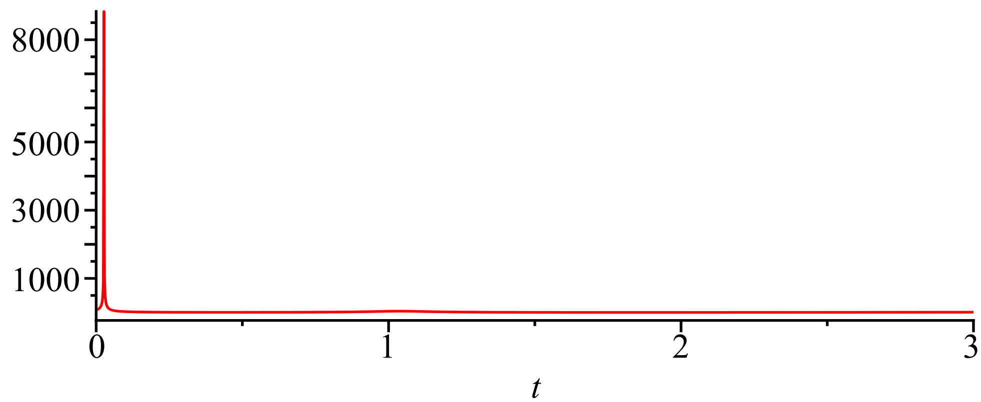
$$(-16.\sin(t)\,t\cos(t)^3 - 16.\,t^2\sin(t)\cos(t) + 74.\sin(t)\,t\cos(t) - 4.\,t\sin(t) + 82. + 144.\cos(t)^6 - 212.\cos(t)^4 + 17.\,t^2\cos(t)^2 + 44.\cos(t)^2 + 8.\cos(t)^2\,t - 4.\,t^2\cos(t) + 8.\,t^2 - 36.\,t - 16.\cos(t)^4\,t^2)^{1/2} \Big/$$

$$((256.\,t^3\cos(t)^4\sin(t) + 64.\,t^3\cos(t)^2\sin(t) - 576.\,t\cos(t)^6\sin(t) - 296.\cos(t)^3\,t^3\sin(t) + 136.\,t^3\sin(t)\cos(t) - 48336.\,t\cos(t)^5\sin(t) - 24256.\cos(t)^2\,t - 15512.\cos(t)^4\,t^2 - 6912.\,t^2\cos(t)^7\sin(t) - 64.\,t^4\cos(t)^2\sin(t) + 16.\cos(t)^3\,t^4\sin(t) + 10368.\,t^2\cos(t)^5\sin(t) - 48.\,t^3\sin(t)\cos(t)^5 + 2936.\,t - 64.\,t^3\cos(t) - 64.\,t^4\cos(t)^3$$

$$+ 32.\, t^4 \sin(t) + 260.\, t^4 \cos(t)^2 + 96.\, t^3 \cos(t)^3 - 80.\, t^3 \sin(t) + 4.\, t^3 \cos(t)^2$$
$$- 40.\, t^3 \cos(t)^4 - 29952.\, t \cos(t)^6 + 6260.\, t^2 \cos(t)^6 - 256.\, t^4 \cos(t)^4$$
$$+ 23616.\, \cos(t)^7 t \sin(t) + 2304.\, \cos(t)^9 t \sin(t) + 1152.\, \cos(t)^7 \sin(t) + 72.\, \sin(t)$$
$$+ 6336.\, \cos(t)^8 t^2 - 16.\, t^4 \cos(t)^6 + 128.\, t^4 \cos(t)^5 + 144.\, t \sin(t) - 104.\, t \cos(t)$$
$$+ 684.\, \cos(t) - 576.\, \cos(t)^7 - 969.\, t^2 - 900.\, \sin(t)\, t \cos(t) + 240.\, t^2 \cos(t)$$
$$+ 6377.\, t^2 \cos(t)^2 + 576.\, \cos(t)^{10} + 2876.\, \sin(t) \cos(t) + 50187.\, \cos(t)^2 - 6970.$$
$$- 5760.\, \cos(t)^8 t - 3456.\, \cos(t)^7 t^2 - 2304.\, \cos(t)^{10} t^2 - 60.\, t^2 \sin(t) \cos(t)$$
$$+ 48.\, t \cos(t)^3 + 17160.\, \sin(t)\, t \cos(t)^3 + 104.\, t^2 \sin(t) - 13624.\, \sin(t) \cos(t)^3$$
$$+ 12096.\, \cos(t)^5 \sin(t) + 57232.\, \cos(t)^4 t - 2184.\, \cos(t)^3 t^2 \sin(t) + 12240.\, \cos(t)^8$$
$$- 1248.\, \cos(t)^3 t^2 + 1696.\, \cos(t)^5 - 16.\, \sin(t) \cos(t)^2 + 4128.\, t^2 \cos(t)^5 + 20.\, t^3$$
$$+ 3440.\, \sin(t) \cos(t)^4 t - 48.\, \sin(t)\, t^2 \cos(t)^2 - 2604.\, \sin(t) \cos(t)^2 t - 68.\, t^4$$
$$- 1340.\, \cos(t)^3 + 55532.\, \cos(t)^6 - 1.12065\ 10^5 \cos(t)^4) \,/\, (-256.\, t^3 \cos(t)^4 \sin(t)$$
$$+ 728.\, t^3 \cos(t)^2 \sin(t) + 1152.\, t \cos(t)^6 \sin(t) - 2004.\, \cos(t)^3 t^3 \sin(t)$$
$$- 2368.\, t^3 \sin(t) \cos(t) + 32784.\, t \cos(t)^5 \sin(t) - 512.\, t^4 \cos(t)^5 \sin(t) + 1856.\, \cos(t)^2 t$$
$$+ 12300.\, \cos(t)^4 t^2 + 4608.\, t^2 \cos(t)^7 \sin(t) - 128.\, t^4 \cos(t)^2 \sin(t)$$
$$+ 544.\, \cos(t)^3 t^4 \sin(t) + 256.\, t^4 \sin(t) \cos(t) - 6528.\, t^2 \cos(t)^5 \sin(t)$$
$$+ 2912.\, t^3 \sin(t) \cos(t)^5 + 5904.\, t - 512.\, t^3 \cos(t)^7 \sin(t) - 20736.\, \cos(t)^{12}$$
$$- 416.\, t^3 \cos(t) + 136.\, t^4 \cos(t)^3 - 544.\, t^4 \cos(t)^2 + 192.\, t^3 \cos(t)^3 + 64.\, t^3 \sin(t)$$
$$+ 3464.\, t^3 \cos(t)^2 - 4304.\, t^3 \cos(t)^4 + 13760.\, t \cos(t)^6 - 256.\, \cos(t)^8 t^4 + 3688.\, t^2 \cos(t)^6$$
$$+ 64.\, t^4 \cos(t) + 223.\, t^4 \cos(t)^4 + 768.\, t^3 \cos(t)^6 - 28096.\, \cos(t)^7 t \sin(t)$$
$$+ 4608.\, \cos(t)^9 t \sin(t) - 11424.\, \cos(t)^8 t^2 + 544.\, t^4 \cos(t)^6 - 128.\, t^4 \cos(t)^5$$
$$+ 656.\, t \sin(t) - 2624.\, t^2 - 6724. - 12136.\, \sin(t)\, t \cos(t) + 1248.\, t^2 \cos(t)$$
$$- 8376.\, t^2 \cos(t)^2 + 61056.\, \cos(t)^{10} - 7216.\, \cos(t)^2 - 2304.\, \cos(t)^8 t + 1152.\, \cos(t)^7 t^2$$
$$+ 4608.\, \cos(t)^{10} t^2 + 7952.\, t^2 \sin(t) \cos(t) - 3888.\, \sin(t)\, t \cos(t)^3 - 288.\, t^2 \sin(t)$$
$$- 15968.\, \cos(t)^4 t - 928.\, \cos(t)^3 t^2 \sin(t) - 57616.\, \cos(t)^8 - 368.\, \cos(t)^3 t^2$$
$$- 1568.\, t^2 \cos(t)^5 + 576.\, t^3 - 1696.\, \sin(t) \cos(t)^4 t + 64.\, \sin(t)\, t^2 \cos(t)^2$$
$$+ 352.\, \sin(t) \cos(t)^2 t - 64.\, t^4 - 4960.\, \cos(t)^6 + 32832.\, \cos(t)^4)\,)^{1/2}$$

Note que para qualquer curva não-trivial a expressão da curvatura torna-se bastante complexa.
Façamos um gráfico do raio de curvatura no intervalo:

```
> plot(R, t=0..3)
```



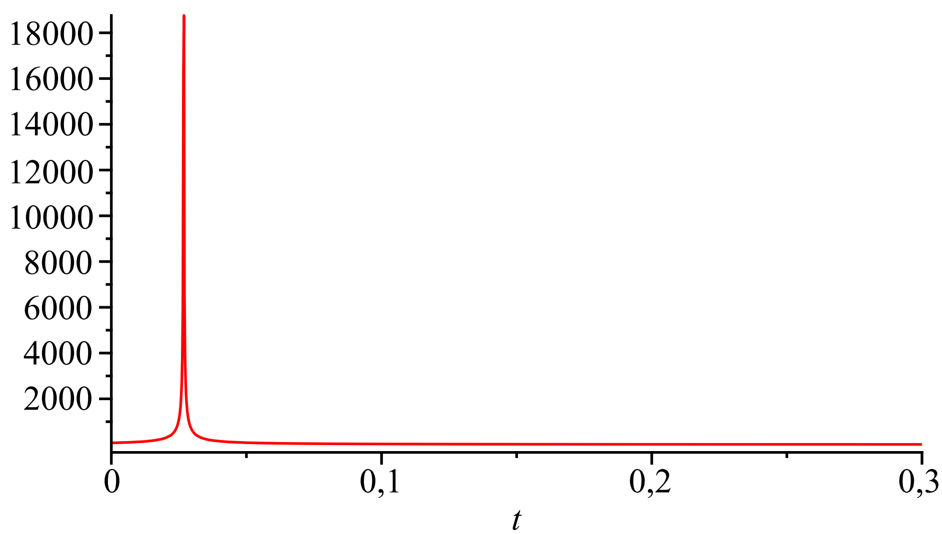
Determinemos exatamente os valores máximo e mínimo da curvatura neste intervalo e os valores de t onde eles ocorrem

> $with(Optimization):$

> $Maximize(R, t = 0..0.3)$

$$[39834.6519738458300, [t = 0.0267800191739423870]] \tag{10}$$

> $plot(R, t = 0..0.3)$



> $Minimize(R, t = 0..3)$

$$[2.01858313476467632, [t = 1.85438173638402270]] \tag{11}$$

Ou seja, $R_{\max} = 39834.6545189241660$ em $t = 0.0267800187057199504$ e $R_{\min} = 0.2.01858313476467321$ em $t = 1.85438172583632732$.

Determinemos a tríade de Serret-Frenet. Os vetores normal e binormal são dados por

> $n := simplify(PrincipalNormal(r, t))$

$$n := [[-(-162 - 16\, t^3 \cos(t)^4 \sin(t) + 288\, t \cos(t)^6 \sin(t) + 64 \cos(t)^3\, t^3 \sin(t) - 32\, t^3 \sin(t) \cos(t) - 864\, t \cos(t)^5 \sin(t) - 8 \cos(t)^2\, t - 64 \cos(t)^4\, t^2 + 36\, t + 8\, t^3 \cos(t) - 4\, t^3 \sin(t) - 32\, t^3 \cos(t)^2 + 18 \sin(t) - 49\, t \sin(t) - 30\, t \cos(t) + 171 \cos(t) - 144 \cos(t)^7 - 72\, t^2 - 162 \sin(t)\, t \cos(t) - 16\, t^2 \cos(t) + 192\, t^2 \cos(t)^2 - 90 \cos(t)^2 - 16\, t^2 \sin(t) \cos(t) - 12\, t \cos(t)^3 + 864 \sin(t)\, t \cos(t)^3 + 28\, t^2 \sin(t) - 40 \cos(t)^3\, t^2 \tag{12}$$

$$+ 424\cos(t)^5 - 4\sin(t)\cos(t)^2 + 32t^2\cos(t)^5 + 16t^3 - 188\sin(t)\cos(t)^4 t - 4\sin(t)\cos(t)^2 t - 335\cos(t)^3 - 288\cos(t)^6 + 424\cos(t)^4\Big) \Big/ \Big(-16\sin(t)\,t\cos(t)^3 - 16t^2\sin(t)\cos(t) + 74\sin(t)\,t\cos(t) - 4t\sin(t) + 82 + 144\cos(t)^6 - 212\cos(t)^4 + 17t^2\cos(t)^2 + 44\cos(t)^2 + 8\cos(t)^2 t - 4t^2\cos(t) + 8t^2 - 36t - 16\cos(t)^4 t^2\Big)^{3/2}\Big],$$

$$\Big[\Big(3\,\big(42\cos(t)^2 t + 64t^2\cos(t)^6\sin(t) - 12t + 246\sin(t) - 108t\sin(t) + 135t\cos(t) - 54\cos(t) - 24t^2\cos(t) - 6\sin(t)\cos(t) + 16\sin(t)\cos(t)^6 + 112\sin(t)\cos(t)^4 + 524\cos(t)^5 t - 6t^2\sin(t)\cos(t) - 697t\cos(t)^3 + 24t^2\sin(t) + 8\sin(t)\cos(t)^3 - 24\cos(t)^4 t + 40\cos(t)^3 t^2\sin(t) + 160\cos(t)^3 t^2 - 16\cos(t)^5 - 873\sin(t)\cos(t)^2 - 128t^2\cos(t)^5 - 96\sin(t)\,t^2\cos(t)^2 + 384\sin(t)\cos(t)^2 t - 88\sin(t)\cos(t)^4 t^2 + 84\cos(t)^3\big)\Big) \Big/ \Big(-16\sin(t)\,t\cos(t)^3 - 16t^2\sin(t)\cos(t) + 74\sin(t)\,t\cos(t) - 4t\sin(t) + 82 + 144\cos(t)^6 - 212\cos(t)^4 + 17t^2\cos(t)^2 + 44\cos(t)^2 + 8\cos(t)^2 t - 4t^2\cos(t) + 8t^2 - 36t - 16\cos(t)^4 t^2\Big)^{3/2}\Big],$$

$$\Big[-\Big(-2 - 2t^3\sin(t)\cos(t) - 864t\cos(t)^5\sin(t) - \cos(t)^2 t - 31t + 8t^3\cos(t) - 24t^3\cos(t)^3 + 4t^3\sin(t) + 32t^3\cos(t)^2 + 4t^3\cos(t)^4 + 1152t\cos(t)^6 + 288\cos(t)^7\sin(t) + 18\sin(t) + 4t\sin(t) + 30t\cos(t) - 2t^2 - 162\sin(t)\,t\cos(t) - 4t^2\cos(t) + 4t^2\cos(t)^2 + 719\sin(t)\cos(t) - 160\cos(t)^2 - 576\cos(t)^8 t + 21t^2\sin(t)\cos(t) + 12t\cos(t)^3 + 864\sin(t)\,t\cos(t)^3 - 2t^2\sin(t) - 3406\sin(t)\cos(t)^3 + 3024\cos(t)^5\sin(t) - 550\cos(t)^4 t + 10\cos(t)^3 t^2\sin(t) - 4\sin(t)\cos(t)^2 - 16t^3 - 36\sin(t)\,t^2\cos(t)^2 - 288\cos(t)^6 + 432\cos(t)^4\Big) \Big/ \Big(-16\sin(t)\,t\cos(t)^3 - 16t^2\sin(t)\cos(t) + 74\sin(t)\,t\cos(t) - 4t\sin(t) + 82 + 144\cos(t)^6 - 212\cos(t)^4 + 17t^2\cos(t)^2 + 44\cos(t)^2 + 8\cos(t)^2 t - 4t^2\cos(t) + 8t^2 - 36t - 16\cos(t)^4 t^2\Big)^{3/2}\Big]\Big]$$

> $b := Binormal(r, t)$

$$b := \Big[\Big[\Big(3\,\big(8\sin(t)\cos(t)^4 + 90\sin(t)\cos(t)^2 - 24\sin(t)\cos(t)^2 t - 27\sin(t) + 6t\sin(t) + 6\cos(t) - 16\cos(t)^5 t - 8\cos(t)^3 + 20t\cos(t)^3\big)\Big) \Big/ \Big(16\sin(t)\,t\cos(t)^3 + 16t^2\sin(t)\cos(t) - 74\sin(t)\,t\cos(t) + 4t\sin(t) - 82 - 144\cos(t)^6 + 212\cos(t)^4 - 17t^2\cos(t)^2 - 44\cos(t)^2 - 8\cos(t)^2 t + 4t^2\cos(t) - 8t^2 + 36t + 16\cos(t)^4 t^2\Big)\Big],$$ **(13)**

$$\Big[\Big(6\sin(t)\cos(t)^2 t - 8\sin(t)\,t\cos(t) - 2\sin(t) - 2t^2\sin(t) + 5t\sin(t) + 18 - 16t^2\cos(t)^2 + 4\cos(t)^3 t^2 - 4\cos(t)^3 - 4\cos(t)^2 + 2t\cos(t) - 10\cos(t) + 8t^2\Big) \Big/ \Big(16\sin(t)\,t\cos(t)^3 + 16t^2\sin(t)\cos(t) - 74\sin(t)\,t\cos(t) + 4t\sin(t) - 82 - 144\cos(t)^6 + 212\cos(t)^4 - 17t^2\cos(t)^2 - 44\cos(t)^2 - 8\cos(t)^2 t + 4t^2\cos(t) - 8t^2 + 36t + 16\cos(t)^4 t^2\Big)\Big],$$

$$\left[-\left(3\left(8\sin(t)\,t\cos(t)^3 - 24\sin(t)\cos(t)^2 t + 6\,t\sin(t) - 8\cos(t)^3 + 9\cos(t)^2 + 6\cos(t) - 4\cos(t)^4 - 3\right)\right) \Big/ \left(16\sin(t)\,t\cos(t)^3 + 16\,t^2\sin(t)\cos(t) - 74\sin(t)\,t\cos(t) + 4\,t\sin(t) - 82 - 144\cos(t)^6 + 212\cos(t)^4 - 17\,t^2\cos(t)^2 - 44\cos(t)^2 - 8\cos(t)^2 t + 4\,t^2\cos(t) - 8\,t^2 + 36\,t + 16\cos(t)^4 t^2\right) \right]\right]$$

Portanto, $t=2$ temos

> $v1 := subs(t=2., v)$

$$v1 := \begin{bmatrix} 3.922996246 \\ 2.880510860 \\ -1.626433640 \end{bmatrix} \quad \textbf{(14)}$$

> $n1 := subs(t=2., n)$

$$n1 := \begin{bmatrix} 0.6506256916 \\ 0.3022978887 \\ 2.104712059 \end{bmatrix} \quad \textbf{(15)}$$

> $b1 := subs(t=2., b)$

$$b1 := \begin{bmatrix} 1.277264730 \\ -1.815246066 \\ -0.1341163010 \end{bmatrix} \quad \textbf{(16)}$$

O plano osculador neste ponto é dado por

> $evalf(DotProduct(b1, \langle X, Y, Z\rangle)) = 0$

$$1.277264730\,X - 1.815246066\,Y - 0.1341163010\,Z = 0 \quad \textbf{(17)}$$

O plano retificador é

> $evalf(DotProduct(n1, \langle X, Y, Z\rangle)) = 0$

$$0.6506256916\,X + 0.3022978887\,Y + 2.104712059\,Z = 0 \quad \textbf{(18)}$$

As retas tangente, normal e binormal em $t=2$ são dadas, respectivamente, por

> $with(plots):$

> $T := 2$

$$T := 2 \quad \textbf{(19)}$$

> $Rtan := evalf(subs(t=T, r) + k\,subs(t=T, v));$
> $Rnor := evalf(subs(t=T, r) + k\,subs(t=T, n));$
> $Rbin := evalf(subs(t=T, r) + k\,subs(t=T, b));$

$$Rtan := \begin{bmatrix} 2.181405146 + 3.922996246\,k \\ -0.2794154982 + 2.880510860\,k \\ -13.30728724 - 1.626433640\,k \end{bmatrix}$$

$$Rnor := \begin{bmatrix} 2.181405146 + 0.6506256915\,k \\ -0.2794154982 + 0.3022978887\,k \\ -13.30728724 + 2.104712059\,k \end{bmatrix}$$

(20)

$$Rbin := \begin{bmatrix} 2.181405146 + 1.277264730\,k \\ -0.2794154982 - 1.815246066\,k \\ -13.30728724 - 0.1341163010\,k \end{bmatrix} \quad \textbf{(20)}$$

Façamos o gráfico da curva junto com as retas tangente, normal principal e binormal.

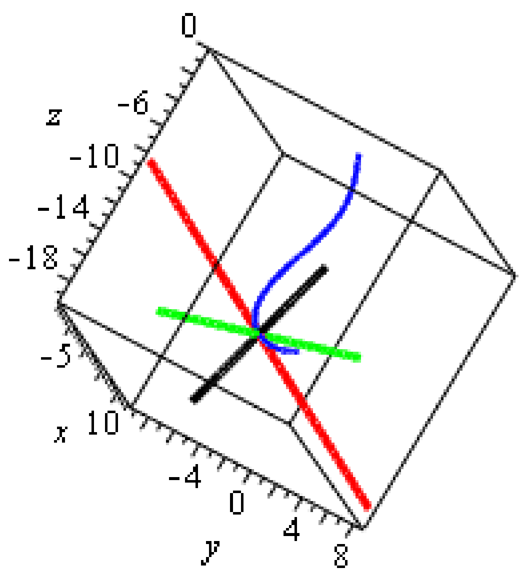
> $P1 := spacecurve(r, t = 0..3, thickness = 2, color = blue)$:

> $ptan := spacecurve\big(Rtan, k = -3..3, axes = boxed, color = red, labels = [x, y, z], thickness = 3\big)$:

> $pnor := spacecurve\big(Rnor, k = -3..3, axes = boxed, color = black, labels = [x, y, z], thickness = 3\big)$:

> $pbin := spacecurve\big(Rbin, k = -5..5, axes = boxed, color = green, labels = [x, y, z], thickness = 3\big)$:

> $display([P1, ptan, pnor, pbin], scaling = constrained)$



Exemplo 2 Seja a curva dada por $\vec{r}(t) := (t\cos(2\,t), t\sin(t), t)$. Determinemos a evolução da tríade de Serret-Frenet no intervalo $[0, 10]$.

> $restart$:

> $with(plots)$:

> $with(VectorCalculus)$:

> $with(LinearAlgebra)$:

> $r := \langle t\cos(2\,t), t\sin(t), t\rangle$

$$r := (t\cos(2\,t))e_x + (t\sin(t))e_y + (t)e_z \quad \textbf{(21)}$$

O vetor tangente tangente é dado por

> $v := diff(r, t)$

$$v := (\cos(2\,t) - 2\,t\sin(2\,t))e_x + (\sin(t) + t\cos(t))e_y + e_z \tag{22}$$

O vetor tangente unitário é

> $\text{sigma} := simplify\left(\frac{v}{\text{sqrt}(DotProd(v, v))}\right)$:

O vetor normal unitário é dado por (as expressões são demasiado grandes para serem mostradas):

> $N := diff(\text{sigma}, t)$:

> $n := simplify\left(\frac{N}{\text{sqrt}(DotProd(N, N))}\right)$:

O vetor binormal é dado por

> $b := CrossProd(n, \text{sigma})$:

A seguir multiplicamos os vetores unitários tangente, normal principal e binormal por um parâmetro. Isso assegura que ao especificar um dado s teremos segmentos com o mesmo comprimento s.

> $Tn := tt \rightarrow s \cdot subs(t = tt, \text{sigma})$:

> $Nn := tt \rightarrow s \cdot subs(t = tt, n)$:

> $Bn := tt \rightarrow s \cdot subs(t = tt, b)$:

Por conveniência parametrizamos a vetor posição:

> $Rn := tt \rightarrow subs(t = tt, r)$:

Definimos gráficos para as segmentos que representam as tríades, em 100 valores diferentes do parâmetro no intervalo $[0, 10]$, ao longo da curva representada por Rn :

> $S1 := seq\left(spacecurve\left(Rn\left(\frac{tt}{10}\right) + Tn\left(\frac{tt}{10}\right), s = 0\,..2, color = red, thickness = 2\right), tt = 1\,..100\right)$:

> $S2 := seq\left(spacecurve\left(Rn\left(\frac{tt}{10}\right) + Nn\left(\frac{tt}{10}\right), s = 0\,..2, color = green, thickness = 2\right), tt = 1\,..100\right)$:

> $S3 := seq\left(spacecurve\left(Rn\left(\frac{tt}{10}\right) + Bn\left(\frac{tt}{10}\right), s = 0\,..2, color = black, thickness = 2\right), tt = 1\,..100\right)$:

Para apresentar as tríades em uma animação podemos usar os comandos:

> $d1 := display(S1, insequence = true)$:

> $d2 := display(S2, insequence = true)$:

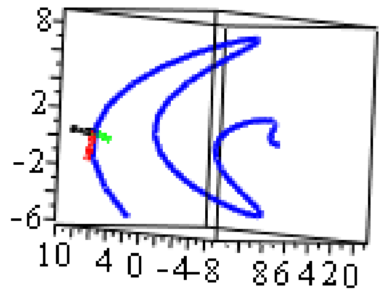
> $d3 := display(S3, insequence = true)$:

O gráfico da curva é dado por

> $d4 := spacecurve(r, t = 0\,..10, color = blue, thickness = 2)$:

Apresentamos agora todos os gráficos definidos acima de forma simultânea:

> $display([d1, d2, d3, d4], axes = boxed, scaling = constrained)$


8
2
-2
-6
10
4 0 -4-8
86420