Distribuição de Poisson

Exemplo. Considere a transmissão de n bits em um canal de comunicação digital.

X : número de bits em erro

Probabilidade p de erro constante e transmissões independentes

Distribuição binomial

$$\lambda = pn$$

$$E(X) = pn = \lambda$$

$$f(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} = \binom{n}{x} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

Suponhamos que o número de bits transmitidos aumenta e a probabilidade de um erro decresce de modo tal que pn permanece constante.

$$E(X) = \lambda = pn = const.$$

$$\lim_{n\to\infty} P(X = x) = \lim_{n\to\infty} \binom{n}{x} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^{x} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

Prova:

Passo 1

$$\boxed{(1-p)^{n-x} \approx e^{-np}}$$

Dedução

$$\ln[(1-p)^{n-x}] = (n-x)\ln(1-p)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} e^{-p} = 1 - p + O(p^2) \approx 1 - p \\ \ln(1-p) \approx -p, \ \text{para } p \ll 1 \end{array}}$$

$$\boxed{(n-x)(-p) = -np}$$

$$\boxed{(1-p)^{n-x} \approx e^{-np}}$$

Passo 2

$$\boxed{\frac{n!}{(n-x)!} \approx n^x}$$

Dedução:

$$\ln\left(\frac{n!}{(n-x)!}\right) \approx \ln(n!) - \ln((n-x)!) \qquad n \to \infty$$

$$= n\ln n - n - (n-x)\ln(n-x) + (n-x)$$

$$\ln(n-x) = \ln n + \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) \approx \ln n + \ln(e^{-x/n})$$

$$\approx \ln n - \frac{x}{n}$$

$$\ln\left(\frac{n!}{(n-x)!}\right) \approx n\ln n - n - (n-x)\ln(n-x) + (n-x)$$

$$\boxed{\ln(n-x) \approx \ln n - \frac{x}{n}}$$

$$(n-x)\ln(n-x) = (n-x)\left(\ln n - \frac{x}{n}\right)$$

$$= n\ln n - x\ln n - x + \frac{x^2}{n} \approx n\ln n - x\ln n - x$$

$$\ln\left(\frac{n!}{(n-x)!}\right) \approx n\ln n - n - (n-x)\ln(n-x) + (n-x)$$

$$\boxed{(n-x)\ln(n-x) \approx n\ln n - x\ln n - x}$$

$$\ln\left(\frac{n!}{(n-x)!}\right) \approx n\ln n - n - (n\ln n - x\ln n - x) + (n-x)$$

$$= x\ln n$$

$$\frac{n!}{(n-x)!} \approx n^x$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{n^x}{x!} p^x e^{-np} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$\boxed{\frac{n!}{(n-x)!} \approx n^x}$$

$$\boxed{(1-p)^{n-x} \approx\sim e^{-np}}$$

$$\lim_{n\to\infty} P(X=x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$x = 0, 1, 2, \ldots$$

Definição

Dado um intervalo de números reais, suponha que as contagens ocorrem aleatoriamente ao longo do intervalo. Se o intervalo pode ser particionado em subintervalos suficientemente pequenos tais que:

1. a probabilidade de mais de uma contagem em um subintervalo é zero.
2. a probabilidade de uma contagem em um subintervalo é a mesma para todos os subintervalos e proporcional ao comprimento do subintervalo.
3. a contagem em cada subintervalo é independente dos outros subintervalos.

Então o experimento é denominado um processo de Poisson.

X – número de contagens no intervalo
- variável aleatória de Poisson

Função de massa de probabilidade de X

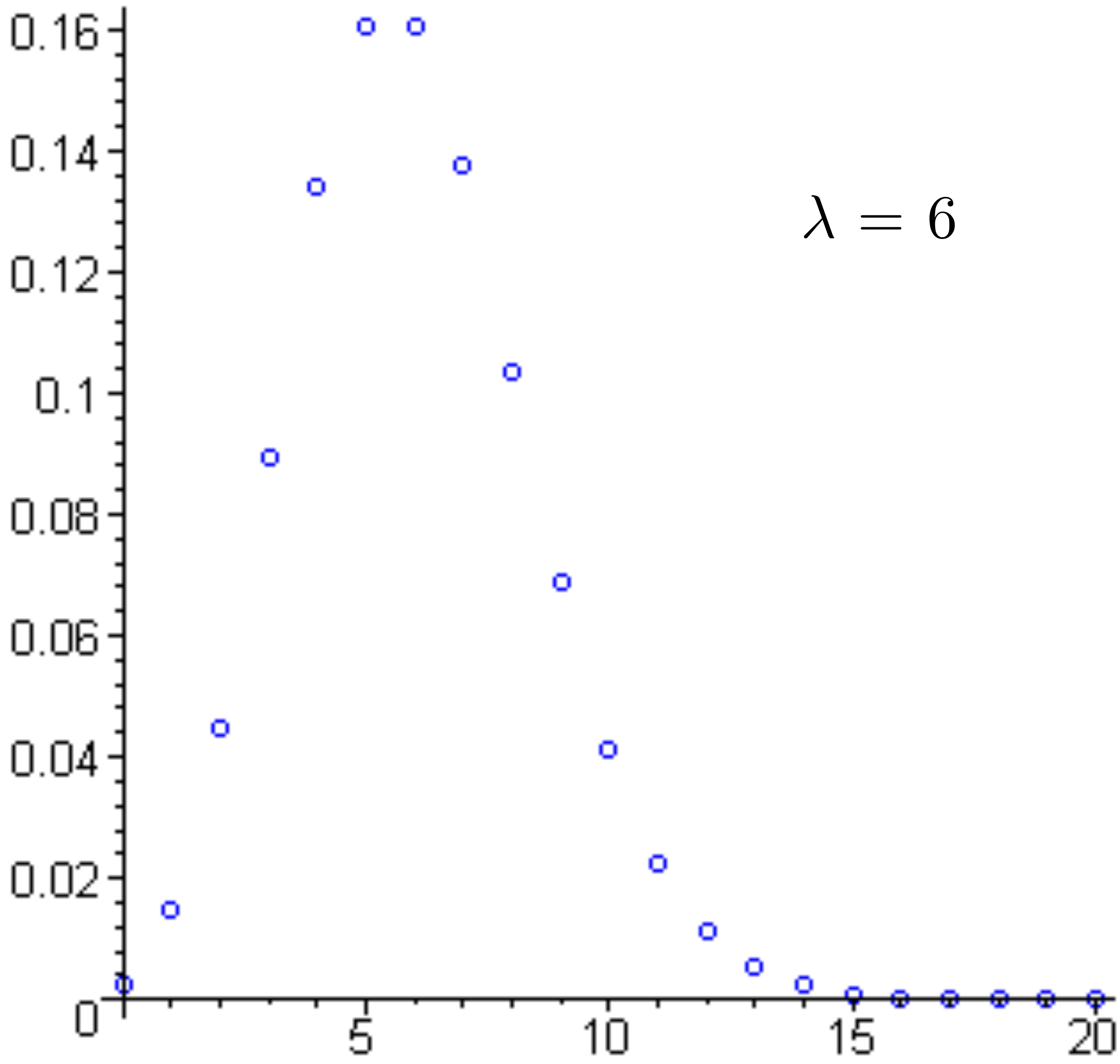
$$\boxed{f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}}$$

Gráficos no Maple

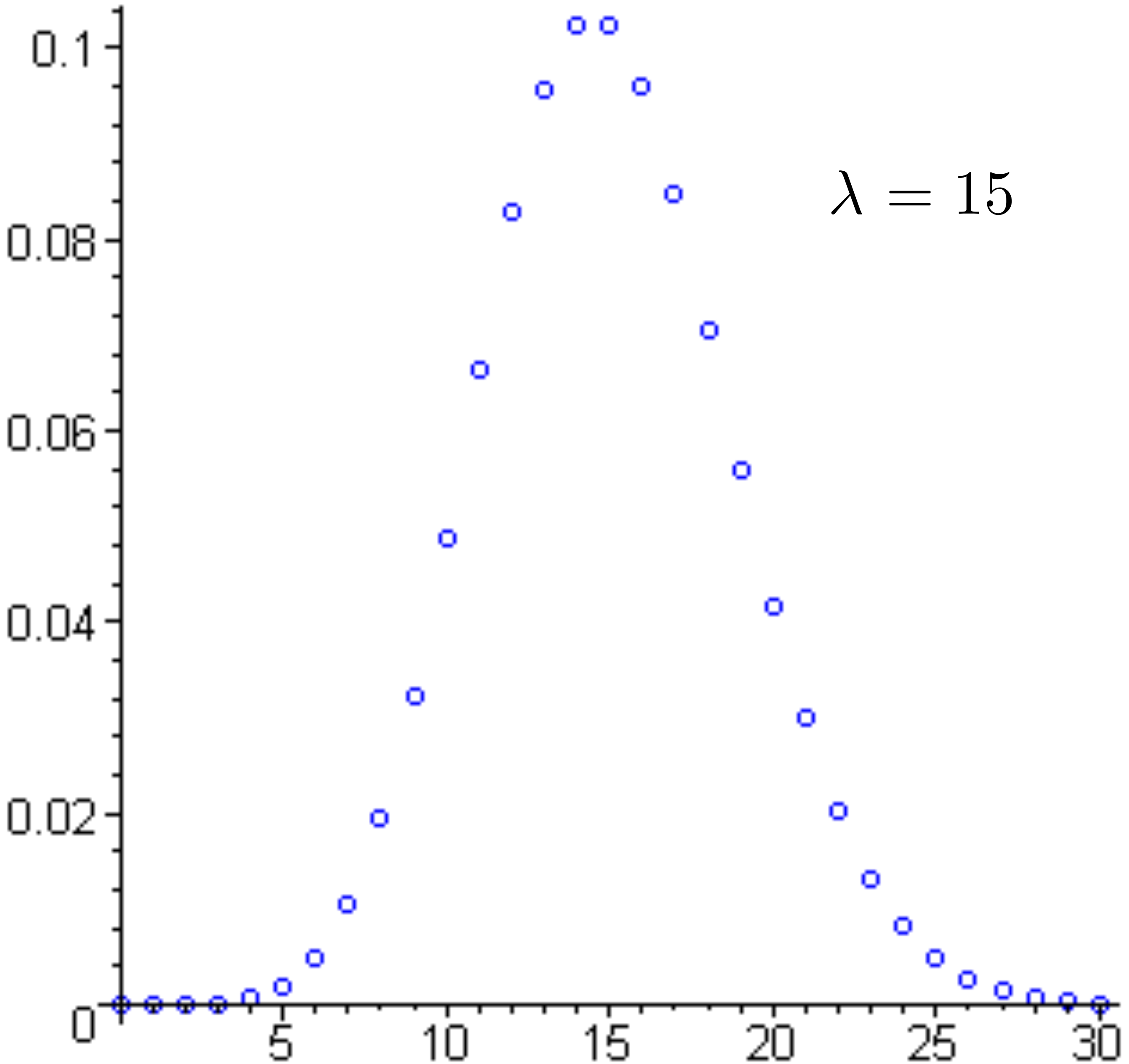
```
> f:=(x,lambda)->exp(-lambda)*lambda^(x)/(x!);
```

$$f := (x, \lambda) \rightarrow \frac{\mathbf{e}^{(-\lambda)} \lambda^{x}}{x!}$$

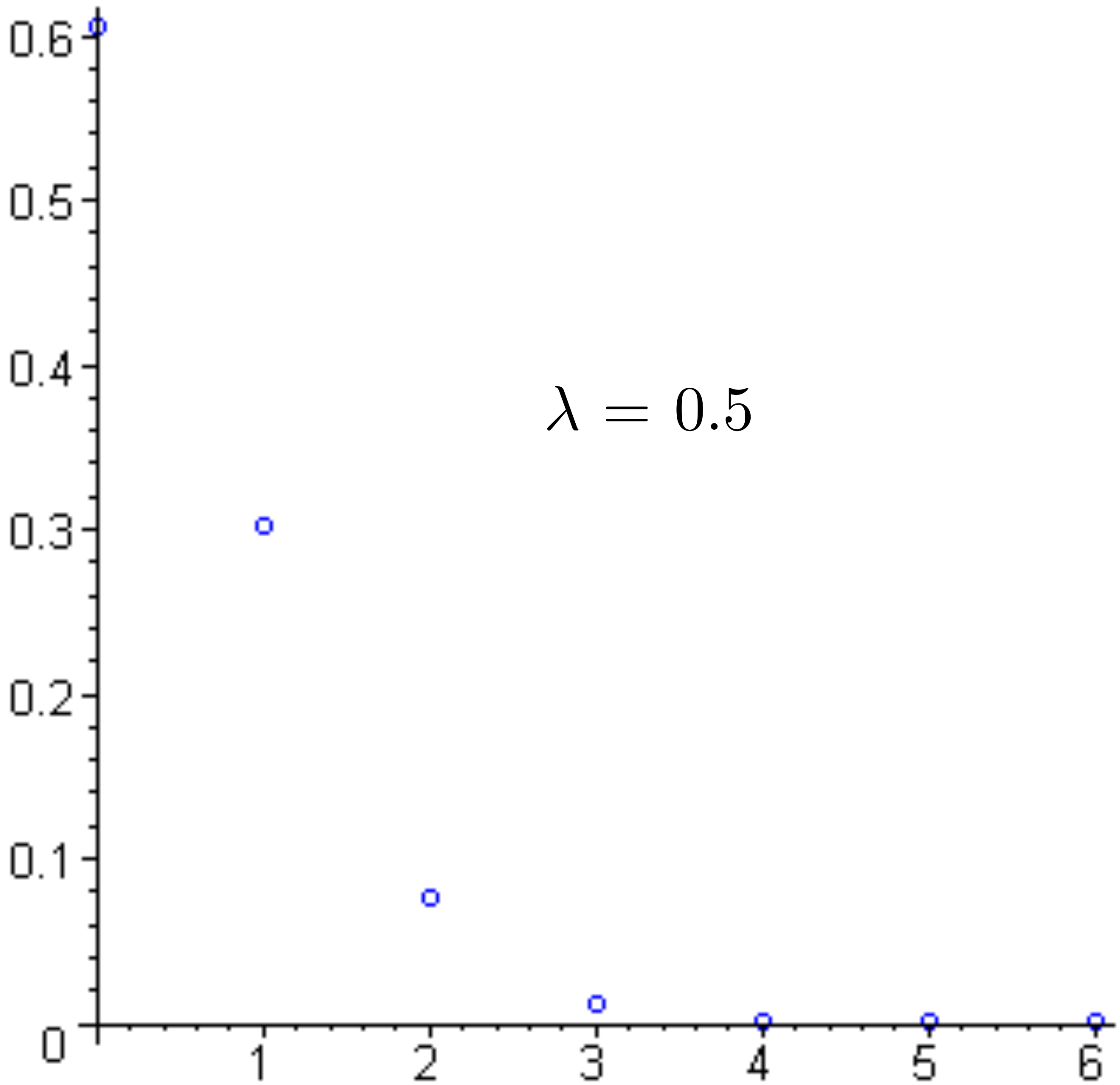
```
> n:=20:

> xdata:=[seq(x,x=0..n)]:

> ydata:=[seq(f(x,6),x=0..n)]:

> with(plots):with(Statistics):

> P1:=PointPlot(ydata,xcoords=xdata,
color=blue, symbol=circle):

> display(P1):
```



0.16
0.14
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
5
10
15
20
$\lambda = 6$



0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
5
10
15
20
25
30
$\lambda = 15$



0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
1
2
3
4
5
6
$\lambda = 0.5$

Exemplo Falhas ocorrem aleatoriamente ao longo de um fio de cobre.

X – variável aleatória que conta o número de falhas em um comprimento de L mm de fio.

Suponha que o número médio de falhas em L mm é λ

Determine a distribuição de probabilidade de X

Partição do comprimento do fio em n subintervalos de comprimento muito pequeno, p. ex. $1\mu m$

Suposições:

• probabilidade de que ocorra mais de uma falha no subintervalo é desprezível.

• falhas ocorrem aleatoriamente (cada subintervalo tem a mesma probabilidade p de conter uma falha.

• a probabilidade de que um subintervalo contenha uma falha é independente dos outros subintervalos.

Podemos modelar a distribuição de X como uma variável aleatória binomial.

Como

$$E(X) = pn = \lambda = const.$$

temos

$$p = \frac{\lambda}{n}$$

Se os subintervalos forem suficientemente pequenos, n é muito grande e p muito pequeno.

Suponha que o número de falhas siga uma distribuição de Poisson, com uma média de 2,3 falhas por milímetro. Determine a probabilidade de termos exatamente 2 falhas em 1 mm de fio.

X - número de falhas em 1 mm de fio

$$E(X) = 2.3 = pn = \lambda$$

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

$$P(X = 2) = \frac{e^{-2.3}2.3^{2}}{2!} = 0.265$$

Determine a probabilidade de termos 10 falhas em 5 mm de fio.

$$E(X) = 5mm \times 2.3 falhas\ /\ mm = 11.5 falhas = pn = \lambda$$

$$P(X = 10) = \frac{e^{-11.5} 11.5^{10}}{10!} = 0.113$$

Determine a probabilidade de ao menos termos 1 falha em 2 mm de fio.

$$E(X) = 2mm \times 2.3 falhas\ /\ mm = 4.6 falhas = pn = \lambda$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-4.6} = 0.9899$$

Exemplo. A contaminação é um problema na manufatura de discos ópticos. O número de partículas de contaminação que ocorrem em um disco óptico tem uma distribuição de Poisson, e o número médio de partículas por cm quadrado de superfície de do disco é 0.1. A área do disco em estudo é de 100 cm quadrados. Encontre a probabilidade de que 12 partículas ocorram na área de um disco sob estudo.

X – número de partículas na área de um disco sob estudo

$$E(X) = 100\,cm^2 \times 0.1 particulas \;/\; cm^2 \; = 10\,particulas \; = \; pn \; = \lambda$$

$$P(X = 12) = \frac{e^{-10}10^{12}}{12!} = 0.095$$

Probabilidade de que nenhuma partícula ocorra no disco sob estudo

$$P(X = 0) = e^{-10} = 4.54\times10^{-5}$$

Probabilidade de que menos 12 partículas ocorram na área do disco:

$$P(X \leq 12) = \sum_{i=0}^{12} \frac{e^{-10}10^{i}}{i!}$$

```
> P:=Sum(exp(-10)*10^i/(i!),i=0..12)=evalf(Sum(exp(-10)*10^i/(i!),i=0..12));
```

$$P := \sum_{i=0}^{12} \frac{\mathbf{e}^{(-10)}\,10^{i}}{i!} = 0.7915564764$$

Variância e Valor Médio

$$\mu = E(X) = \lambda$$

$$\sigma^2 = V(X) = \lambda$$

Exemplo. Temos uma caixa com 200 fusíveis. A experiência mostra que 2% deles são defeituosos. Qual a probabilidade de encontrarmos 5 ou menos fusíveis defeituosos na caixa ?

$n = 200$ $\qquad$ $p = 0.02$

$$E(X) = (200)(0.02) = 4 = pn = \lambda$$

$$P(X \leq 5) = \sum_{x=0}^{5} \frac{e^{-4}\, 4^{x}}{x!} = 0.785$$

Usando distribuição binomial

$$f(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$P(X \leq 5) = \sum_{x=0}^{5} \frac{200!}{x!(200-x)!} 0.02^x (1-0.02)^{200-x}$$

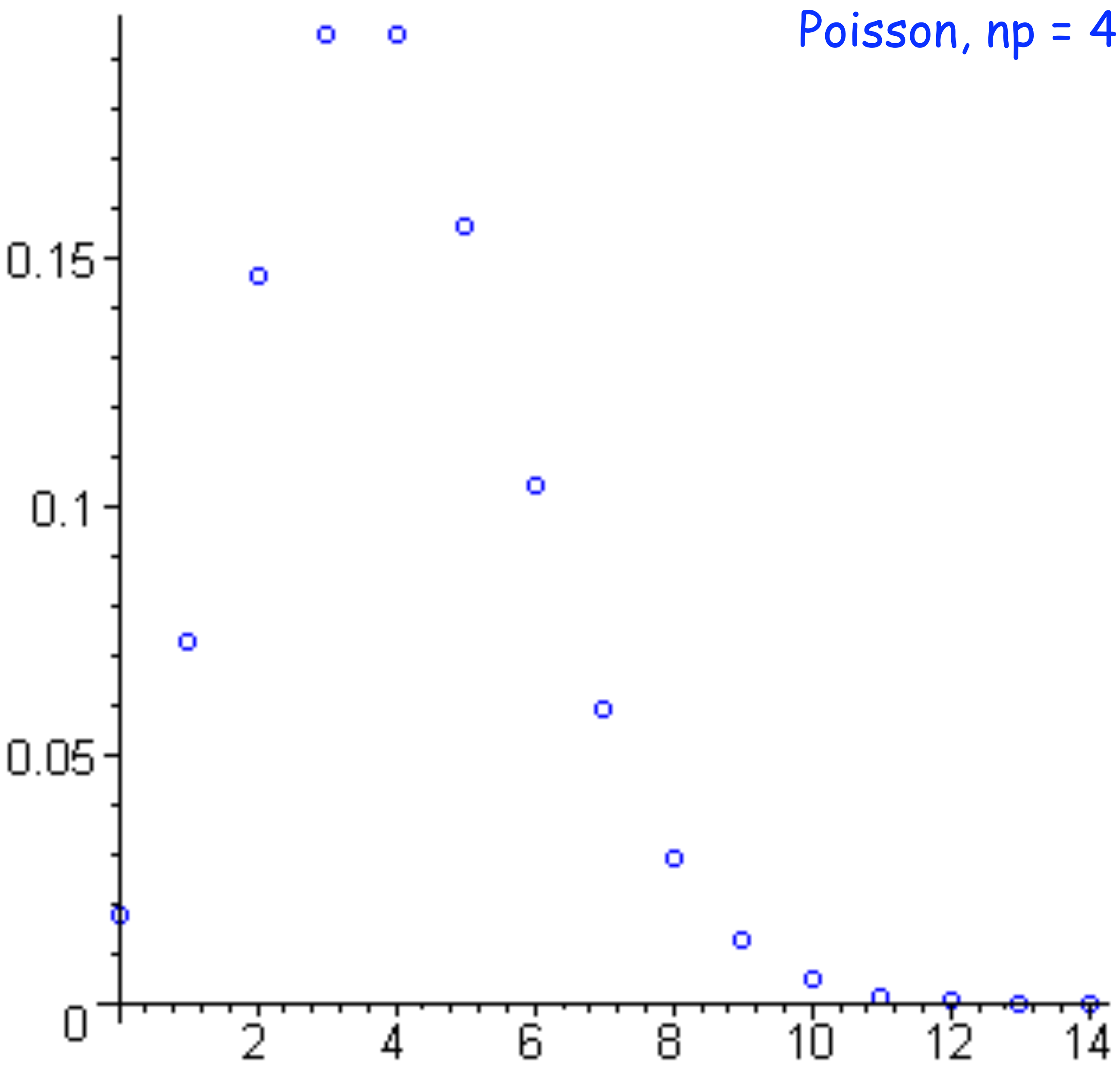
$$= \sum_{n=0}^{5} \binom{200}{x} 0.02^x (1-0.02)^{200-x}$$

```
> p:=2/100:n:=200:
> P:=Sum(binomial(n,x)*p^x*(1-p)^(n-x),x=0..5);
```

$$P := \sum_{x=0}^{5} \operatorname{binomial}(200, x) \left(\frac{1}{50}\right)^{x} \left(\frac{49}{50}\right)^{(200-x)}$$

```
> evalf(P);
```

$$0.7867224657$$


Poisson, np = 4
0.15
0.1
0.05
0
2
4
6
8
10
12
14

```
> fp:=(x,lambda)->exp(-lambda)*lambda^(x)/(x!);
```

$$fp := (x, \lambda) \to \frac{\mathbf{e}^{(-\lambda)} \lambda^x}{x!}$$

```
> fb:=(x,n,p)->binomial(n,x)*p^x*(1-p)^(n-x);
```

$$fb := (x, n, p) \to \mathrm{binomial}(n, x)\, p^x\, (1 - p)^{(n - x)}$$

```
> n:=200:p:=0.02:lambda:=n*p:
> xdata:=[seq(x,x=0..14)]:
> ydata_p:=[seq(fp(x,lambda),x=0..14)]:
> ydata_b:=[seq(fb(x,n,p),x=0..14)]:
```

```
> sum(fp(x,lambda),x=0..5);sum(fb(x,n,p),x=0..5);
```

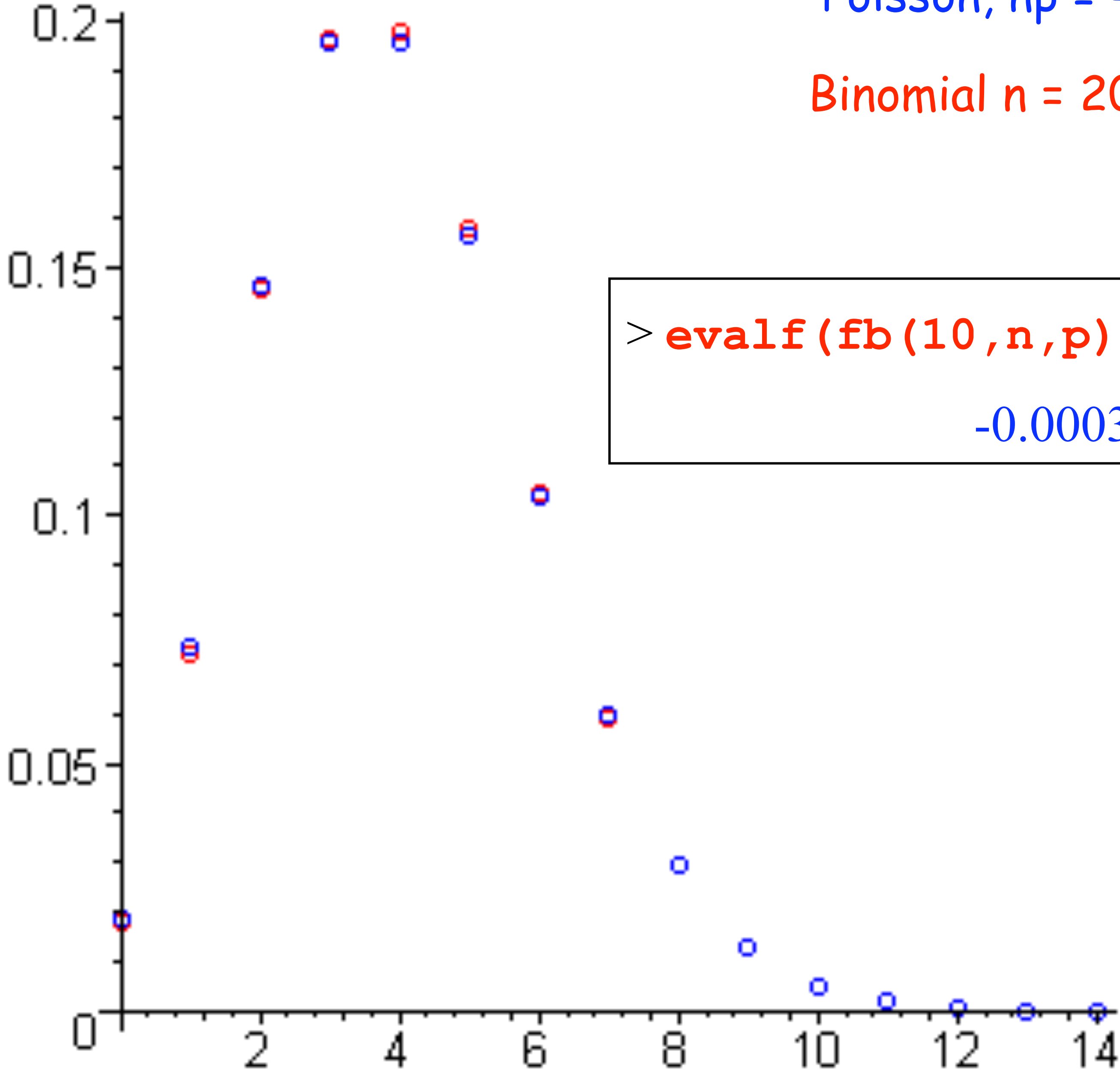
$$0.7851303871$$

$$0.7867224657$$

```
> with(plots):with(Statistics):
> Pp:=PointPlot(ydata_p,xcoords=xdata, color=blue,
symbol=circle):
> Pb:=PointPlot(ydata_b,xcoords=xdata, color=red,
symbol=circle):
> display([Pp,Pb]);
```

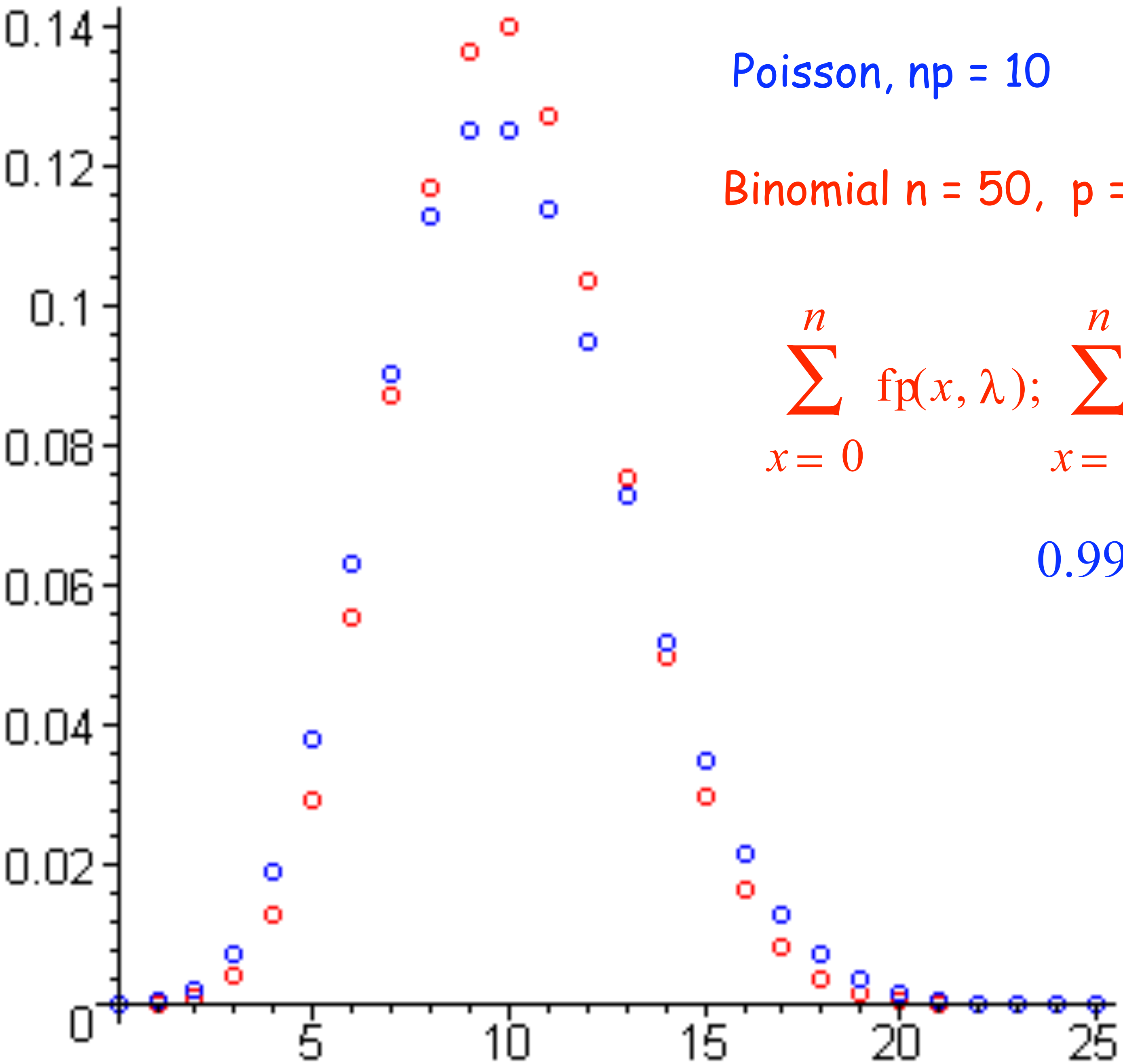
Poisson, np = 4

Binomial n = 200, p = 0.02




```
> evalf(fb(10,n,p)-fp(10,lambda));
```

-0.000343788245



Poisson, np = 10

Binomial n = 50, p = 0.2

$$\sum_{x=0}^{n} \mathrm{fp}(x, \lambda); \sum_{x=0}^{n} \mathrm{fb}(x, n, p)$$

0.9999999999

1.