CÁLCULO VETORIAL CVE

Prof. Fernando D. Sasse
Departamento de Matemática - UDESC

PROVA 1 - 22/08/2007

Soluções com Maxima[1]

1. (2.5) Seja a superfície definida por $z = xy + x^2 + x - 3$. Determine um ponto desta superfície onde o plano tangente é perpendicular ao eixo z.

Solução: Definimos a função:

```
(%i1) f:x*y+x^2+x-3-z;
```

(%o1) $$-z + x\,y + x^2 + x - 3$$

e calculamos o gradiente

```
(%i2) gf:[diff(f,x),diff(f,y),diff(f,z)];
```

(%o2) $$[y + 2\,x + 1, x, -1]$$

Este vetor deve ser paralelo a

```
(%i3) v:[0,0,-1];
```

(%o3) $$[0, 0, -1]$$

Portanto, as coordenadas (x, y) do ponto devem satisfazer:

```
(%i4) eqs:[gf[1]-v[1]=0,gf[2]-v[2]=0,gf[3]-v[3]=0];
```

(%o4) $$[y + 2\,x + 1 = 0, x = 0, 0 = 0]$$

O valor da coordenada z é dada por

```
(%i5) subst(x=0,f);
```

[1] http://maxima.sourceforge.net/

(%o5) $$-z-3$$

Portanto, o ponto procurado é $(0,-1,-3)$. O gráfico associado a esta solução pode ser plotado em gnuplot com o comando:

```
splot (xy+x^2+x-3),-3
```

2. (5) Uma partícula descreve uma curva definida por $\mathbf{r}(t)=(t^3+1,t^2,t)$. Determine, no instante $t=3$:
(i) a velocidade e a aceleração da partícula,
(ii) a aceleração centrípeta e a aceleração tangencial,
(iii) a reta binormal,
(iv) a curvatura,
(v) o plano osculador.

Solução:

```
(%i1) r:[t^3+1,t^2,t];
```

(%o1) $$[t^3+1,t^2,t]$$

```
(%i3) v:diff(r,t);
```

(%o3) $$[3\,t^2,2\,t,1]$$

```
(%i4) a:diff(v,t);
```

(%o4) $$[6\,t,2,0]$$

```
(%i8) rp:subst(t=3,r);
```

(%o8) $$[28,9,3]$$

```
(%i9) vp:subst(t=3,v);
```

(%o9) $[27, 6, 1]$

```
(%i10) ap:subst(t=3,a);
```

(%o10) $[18, 2, 0]$

(ii) A aceleração tangencial é dada pela projeção

```
(%i13) at:(ap.vp)/(vp.vp)*vp;
```

(%o13) $[\frac{6723}{383}, \frac{1494}{383}, \frac{249}{383}]$

```
(%i22) float(%), numer;
```

(%o22) $[17.55352480417755, 3.900783289817233, 0.65013054830287]$

A aceleração centrípeta agora é dada por

```
(%i27) ac:ap-at;
```

(%o27) $[\frac{171}{383}, -\frac{728}{383}, -\frac{249}{383}]$

```
(%i30) float(%), numer;
```

(%o30) $[0.44647519582245, -1.900783289817232, -0.65013054830287]$

(iii) A direção da reta binormal é dada pelo vetor

```
(%i42) B:ap~vp;
```

(%o42) $[18, 2, 0]\ [27, 6, 1]$

```
(%i43) express(B);
```

(%o43) $$[2, -18, 54]$$

Portanto, a reta binormal é dada por

```
(%i48) [x-rp[1]]/Bp[1]=k;
```

(%o48) $$[\frac{x-28}{2}] = k$$

```
(%i49) [y-rp[2]]/Bp[2]=k;
```

(%o49) $$[-\frac{y-9}{18}] = k$$

```
(%i50) [z-rp[3]]/Bp[3]=k;
```

(%o50) $$[\frac{z-3}{54}] = k$$

(iv) o quadrado da curvatura é dado por

```
(%i51) ksq:((vp~ap).(vp~ap))/(vp.vp)^3;
```

(%o51) $$\frac{[-18, -2, 0].[27, 6, 1]\ [-18, -2, 0]\ [27, 6, 1]}{449455096}$$

ou seja,

```
(%i53) k:sqrt(express(ksq));
```

(%o53) $$\frac{\sqrt{811}}{383\sqrt{766}}$$

```
(%i54) float(%), numer;
```

(%o54) $$0.0026865644789288$$

(v) O plano osculador é dado por

```
(%i59) Bp.[x-rp[1],y-rp[2],z-rp[3]]=0;
```

(%o59) $$54\,(z-3)-18\,(y-9)+2\,(x-28)=0$$

```
(%i60) expand(%o59);
```

(%o60) $$54\,z-18\,y+2\,x-56=0$$

3. (2.5) Seja a curva definida pela intersecção das superfícies $z = xy^2 + x^2 + x - 3$ e $z = x + y^2 + 3$. Determine a reta tangente a esta curva no ponto $(2, \sqrt{2}, 7)$.
Solução: Sejam

```
(%i62) f1:x*y**2+x**2+x-3-z;
```

(%o62) $$-z+x\,y^2+x^2+x-3$$

```
(%i63) f2:x+y**2+3-z;
```

(%o63) $$-z+y^2+x+3$$

Calculemos os determinantes das matrizes

```
(%i78) A1:matrix(
 [diff(f1,y),diff(f1,z)],
 [diff(f2,y),diff(f2,z)]
);
```

(%o78) $$\begin{pmatrix} 2\,x\,y & -1 \\ 2\,y & -1 \end{pmatrix}$$

```
(%i67) A2:matrix(
 [diff(f1,z),diff(f1,x)],
 [diff(f2,z),diff(f2,x)]
);
```

(%o67) $$\begin{pmatrix} -1 & y^2+2\,x+1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

```
(%i68) A3:matrix(
 [diff(f1,x),diff(f1,y)],
 [diff(f2,x),diff(f2,y)]
);
```

(%o68) $$\begin{pmatrix} y^2+2\,x+1 & 2\,x\,y \\ 1 & 2\,y \end{pmatrix}$$

Os respectivos determinantes são dados por

```
(%i84) D1:determinant(A1);
```

(%o84) $$2\,y-2\,x\,y$$

```
(%i85) D2:determinant(A2);
```

(%o85) $$y^2+2\,x$$

```
(%i86) D3:determinant(A3);
```

(%o86) $$2\,y\,\left(y^2+2\,x+1\right)-2\,x\,y$$

No ponto em questão,

```
(%i87) rp:[2,sqrt(2),7];
```

(%o87) $$[2,\sqrt{2},7]$$

De modo que

```
(%i89) D1p:subst(y=rp[2],subst(x=rp[1],D1));
```

(%o89) $$-2\sqrt{2}$$

```
(%i90) D2p:subst(y=rp[2],subst(x=rp[1],D2));
```

(%o90) $$6$$

```
(%i91) D3p:subst(y=rp[2],subst(x=rp[1],D3));
```

(%o91) $$10\sqrt{2}$$

A reta tangente procurada é então dada pelo conjunto de três equações:

```
(%i94) (x-rp[1])/D1p=u;
```

(%o94) $$-\frac{x-2}{2\sqrt{2}}=u$$

```
(%i95) (x-rp[2])/D2p=u;
```

(%o95) $$\frac{x-\sqrt{2}}{6}=u$$

```
(%i96) (x-rp[3])/D3p=u;
```

(%o96) $$\frac{x-7}{10\sqrt{2}}=u$$