MATEMÁTICA APLICADA MAP0001

Prof. Fernando Deeke Sasse
Departamento de Matemática - UDESC

PROVA2 - SOLUÇÕES - 01/10/2009

Material permitido durante a prova: tabela de integrais, calculadora. Todas as questões têm o mesmo valor.

1. Se $\mathbf{r} = (x, y, z)$ é o vetor posição e $r = |\mathbf{r}|$, calcule $\nabla \cdot [f(r)\mathbf{r}]$. Use este resultado para mostrar que $\nabla \cdot (r^{n-1}\mathbf{r}) = (n+2)r^{n-1}$.
Solução:
(i) Notemos que

$$\nabla \cdot [f(r)\mathbf{r}] = \frac{\partial(fx)}{\partial x} + \frac{\partial(fy)}{\partial y} + \frac{\partial(fz)}{\partial z} \tag{1}$$

$$= 3f + x\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z} \tag{2}$$

$$= 3f + r\frac{\partial f}{\partial r}\,. \tag{3}$$

(ii) Aqui $f(r) = r^{n-1}$, de modo que

$$\nabla \cdot (r^{n-1}\mathbf{r}) = 3r^{n-1} + r\frac{\partial(r^{n-1})}{\partial r} = 3r^{n-1} + r(n-1)r^{n-2} = (n+2)r^{n-1}\,. \tag{4}$$

2. Um campo forças é dado por $\mathbf{F} = (y\cos x, z^2 + \sin x, 2yz)$. Determine um potencial $V(x, y, z)$ tal que $\mathbf{F} = -\nabla V$. Calcule $\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde C é o segmento reto que liga $(1, 1, 2)$ a $(1, -1, 2)$.
Solução:
Devemos determinar V tal que

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -y\cos x, \qquad \text{de modo que} \qquad V = -y\sin x + \phi_1(y, z)\,, \tag{5}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -z^2 - \sin x, \qquad \text{de modo que} \qquad V = -z^2 y - y\sin x + \phi_2(x, z)\,, \tag{6}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -2yz, \qquad \text{de modo que} \qquad V = -z^2 y + \phi_3(x, y)\,. \tag{7}$$

$$\tag{8}$$

Comparando estas equações vemos que $\phi_1 = yz^2$, $\phi_2 = 0$, $\phi_3(x, y) = -\sin x$, de modo que

$$V = -y\sin x - yz^2\,. \tag{9}$$

Por outro lado,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla V \cdot d\mathbf{r} = \int_P^Q = V(Q) - V(P) = V(1, -1, 2) - V(1, 1, 2) = -2\sin 1 - 8\,. \tag{10}$$

3. Determine a derivada direcional de $f(x, y, z) = xy + x + z^2$ na direção de $P(1, 2, -1)$ a $Q(3, 4, 1)$. Determine também a direção onde a derivada direcional tem seu valor máximo em P e determine sua magnitude.
Solução:
Seja

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ} = (3, 4, 1) - (1, 2, -1) = (2, 2, 2)\,. \tag{11}$$

A derivada direcional na direção de $\mathbf{v}$ é dada por

$$\left.\frac{\partial f}{\partial s}\right|_{PQ} = \nabla f \cdot \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = (y + 1, x, 2z) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[x + y + 2z + 1\right]\,. \tag{12}$$

A derivada direcional máxima tem magnitude dada por

$$|\nabla f| = |(y + 1, x, 2z)| = \sqrt{x^2 + (y + 1)^2 + 4z^2} \tag{13}$$

e em a direção de ∇f. No ponto P temos $|\nabla f| = |(3, 1, -2)| = \sqrt{14}$, e $\partial f/\partial s = 2/\sqrt{3}$.

4. Calcule o fluxo do campo vetorial $\mathbf{F} = (x^4 + y, y^4, z)$ através da superfície esférica de raio 1, centrada na origem, com vetor normal orientado para fora.
Solução:
De acordo com o teorema da divergência,

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV\,. \tag{14}$$

Como

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 4x^3 + 4y^3 + 1\,, \tag{15}$$

temos

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \int_V (4x^3 + 4y^3 + 1) dV\,. \tag{16}$$

Os dois primeiros termos da integral acima se anulam, pois x^3 e y^3 contribuem igualmente, com valores opostos em cada hemisfério. Portanto,

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \int_V dV = \frac{4\pi}{3}\,. \tag{17}$$

5. Determine o fluxo do campo vetorial $\mathbf{F} = (-y, x, -z)$ através da superfície $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 4$, $x \geq 0$, com vetor normal de direção de elemento de área apontando para fora.
Solução:
Esta superfície pode ser parametrizada da seguinte forma:

$$x = 2 \sin\theta \cos\phi\,, \quad y = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\theta \sin\phi\,, \quad z = \sqrt{2} \cos\theta\,, \tag{18}$$

onde $0, \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq \pi$. A superfície é então descrita vetorialmente por

$$\mathbf{r}(\theta, \phi) = (2 \sin\theta \cos\phi, \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\theta \sin\phi, \sqrt{2} \cos\theta)\,. \tag{19}$$

Podemos então escrever

$$d\mathbf{S} = \mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi \, d\theta \, d\phi \,, \tag{20}$$

onde

$$\mathbf{r}_\theta = (2\cos\theta\cos\phi, \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta\sin\phi, -\sqrt{2}\sin\theta) \,, \tag{21}$$

$$\mathbf{r}_\phi = (-2\sin\theta\sin\phi, \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta\cos\phi, 0) \,, \tag{22}$$

$$\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2\cos\theta\cos\phi & (2/\sqrt{3})\cos\theta\sin\phi & -\sqrt{2}\sin\theta \\ -2\sin\theta\sin\phi & (2/\sqrt{3})\sin\theta\cos\phi, & 0 \end{vmatrix} \tag{23}$$

$$= \Big((2\sqrt{2}/\sqrt{3})\sin^2\theta\cos\phi, 2\sqrt{2}\sin^2\theta\sin\phi, (4/\sqrt{3})\sin\theta\cos\theta \Big) \,. \tag{24}$$

Portanto,

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \Big[(8\sqrt{2}/3)\sin^3\theta\sin\phi\cos\phi - (4\sqrt{2}/\sqrt{3})\cos^2\theta\sin\theta \Big] \, d\theta d\phi \,, \tag{25}$$

e a integral de fluxo é dada por

$$\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^\pi \left[\frac{4\sqrt{2}}{3}\sin^3\theta\sin(2\phi) - \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cos^2\theta\sin\theta \right] d\theta d\phi \,. \tag{26}$$

O primeiro termo da integral (26) é nulo, pois é uma função ímpar em ϕ integrada num período completo. O segundo termo resulta em

$$\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = -\frac{4\sqrt{2}\pi}{3}\int_0^\pi \cos^2\theta\sin\theta d\theta = -\frac{8\sqrt{6}\pi}{9} \,. \tag{27}$$

Podemos também resolver este problema aplicando o teorema da divergência sobre o volume do semi-hiperbolóide, ou seja,

$$\int_{xy} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} + \int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla\cdot\mathbf{F} \, dV = -\int_V dV \,, \tag{28}$$

onde o primeiro termo representa o fluxo através da base no plano xy. Portanto,

$$\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = -\int_{xy} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} - \int_V dV \,. \tag{29}$$

Calculemos inicialmente o fluxo através do plano xy. Aqui $d\mathbf{F} = -\mathbf{i} dy\,dz$ e

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = (-y, 0, -z)\cdot(-1, 0, 0) dy\,dz = y dy\,dz \,. \tag{30}$$

Portanto,

$$\int_{xy} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int_{-2/\sqrt{3}}^{2/\sqrt{3}} y \int_{-\sqrt{2-3y^2/2}}^{\sqrt{2-3y^2/2}} dz\,dy = 2\int_{-2/\sqrt{3}}^{2/\sqrt{3}} y\sqrt{2-\frac{3y^2}{2}} dy = 0 \,. \qquad \text{(por simetria)} \tag{31}$$

Por outro lado, o volume do meio hiperbolóide é dado por

$$V = \int_{-2/\sqrt{3}}^{2/\sqrt{3}} y \int_{-\sqrt{2-3y^2/2}}^{\sqrt{2-3y^2/2}} \int_0^{\sqrt{4-3y^2-2z^2}} dx\, dz\, dy = \frac{8}{9}\sqrt{6}\pi\,. \tag{32}$$

Substituindo (32-31) em (29) reobtemos o resultado (27).

6. Determine a integral que dá o fluxo do campo vetorial $\mathbf{F} = (-xy, y^2, -zy)$ através do primeiro octante da elipsóide $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 4$ (não é necessário resolver a integral).
Solução:
Usando a mesma parametrização do problema anterior, temos

$$\mathbf{F} = (-xy, y^2, -zy) = \left(-\frac{4}{\sqrt{3}} \sin^2\theta \sin\phi \cos\phi, \frac{4}{3} \sin^2\theta \sin^2\phi, \frac{-2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sin^2\theta \cos\theta \sin\phi \right). \tag{33}$$

Portanto, usando (24), temos

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi \, d\theta\, d\phi \\
&= \left(-\frac{8\sqrt{2}}{3} \sin^4\theta \cos^2\phi \sin\phi + \frac{8\sqrt{2}}{3} \sin^4\theta \sin^3\phi - \frac{8\sqrt{2}}{3} \sin^2\theta \cos^2\theta \sin\phi \right) d\theta\, d\phi \\
&= \frac{8\sqrt{2}}{3} \left[\sin\phi \sin^2\theta (1 - 2\cos^2\theta) \right] d\theta\, d\phi\,.
\end{aligned} \tag{34}$$

O fluxo através do primeiro octante é dado por

$$\begin{aligned}
\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \frac{8\sqrt{2}}{3} \left[\sin\phi \sin^2\theta (1 - 2\cos^2\theta) \right] d\theta\, d\phi \\
&= \frac{8\sqrt{2}}{3} \int_0^{\pi/2} \frac{\pi}{8} \sin\phi \, d\phi = \frac{\sqrt{2}\pi}{3}\,.
\end{aligned} \tag{35}$$